

УДК 537.876.4;537-77;538.956

ГЕНЕРАЦИЯ СВЧ-ИЗЛУЧЕНИЯ В КОАКСИАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ НА ОСНОВЕ МАССИВА ПРОТЯЖЕННЫХ НАНОТРУБОК, ОБРАЗУЮЩИХ ТРЕХМЕРНУЮ СТРУКТУРУ

© 2026 г. Н. Р. Садыков^а, *, И. Е. Шакиров^а

^аСнежинский физико-технический институт — филиал Национального
исследовательского ядерного университета МИФИ, Снежинск, Челябинская обл., 456776 Россия

*E-mail: n.r.sadykov@rambler.ru

Поступила в редакцию 30.04.2025 г.

После доработки 30.04.2025 г.

Принята к публикации 15.05.2025 г.

Исследуется механизм генерации черенковского сверхизлучения, источником которого являются модулированные переменные поверхностные токи в массиве удлиненных нанотрубок, образующих трехмерную структуру. Скорость распространения для огибающей токов в нанотрубках больше скорости света в коаксиальной волноводной среде. Поверхностные токи генерируются с помощью мощных коротких электрических импульсов ($z-vt$) в коаксиальном волноводе. Эффективная диэлектрическая проницаемость внутри коаксиального волновода определяется исходя из модели Максвелла—Гарнетта с поправкой приближения Клаузиуса—Моссотти.

Ключевые слова: эффект Вавилова—Черенкова, массив нанотрубок, приближение эффективной среды, диполь, модель Максвелла—Гарнетта, приближение Клаузиуса—Моссотти

DOI: 10.56304/S2079562926010409

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует большое число процессов, связанных с излучением, поглощением и усилением электромагнитных волн при сверхсветовом движении зарядов и различных систем (диполи, атомы и т.д.). При движении излучателя в среде или вблизи среды со скоростями, превосходящими фазовую скорость света в этой среде, возникают качественно новые явления — это эффект Вавилова—Черенкова для заряда, черенковское излучение дипольных и магнитных моментов в безграничной среде и в щелях или каналах, черенковское поглощение;

Излучение Черенкова лежит в основе лазеров на свободных электронах [1], ламп бегущей волны [2], генераторов обратной волны [3], устройств регистрации субнаносекундных микроволновых импульсов при прямолинейном движении электронного сгустка в периодической замедляющей системе [4, 5] и др.

Графен и, в частности, углеродные нанотрубки (УНТ), в силу своих разнообразных свойств являются очень перспективными материалами в качестве эмиттера типа Черенкова, поскольку существуют хорошо известные и довольно легкие методы для изменения их конститутивных пара-

метров в широком диапазоне. Например, хорошо разработанные методы легирования графена [6], легирования УНТ [7, 8], которые позволяют плавно изменять поверхностную проводимость. Кроме того, было показано, что УНТ и графен могут значительно замедлить поверхностную электромагнитную волну [9, 10].

В данной работе исследуется механизм генерации сверхизлучения Черенкова в коаксиальном цилиндрическом волноводе, где в качестве среды в волноводе рассматривается массив УНТ. В качестве электродинамической среды в случае излучения Черенкова могут быть использованы графеновые слоистые системы как источник терагерцового излучения с настроенной частотой [10, 11], трехмерные массивы УНТ [12–14] или массивы на основе других удлиненных наночастицы, способных создать объемный переменный ток за счет продольных поверхностных токов в отдельных наночастицах. Для создания трехмерного массива можно использовать α - или β -выровненные пленки [15] с расположенным на них УНТ (двумерные массивы). Если УНТ перпендикулярны или параллельны поверхности пленок, то они соответственно называются β - или α -выровненными пленками. В данной работе воспользуемся формулой эффек-

тивной диэлектрической функции, которая представляет собой модель Максвелла–Гарнетта с поправкой Клаузиуса–Моссотти (геометрическая модель массивов), поскольку основана на строгом решении уравнений Максвелла в предположении малой плотности включений [16–21].

Работа [14] является продолжением работы [12, 13]. В [12] был рассмотрен механизм генерации излучения, источником которого являлись модулированные относительно переменной $(z - vt)$ поверхностные токи в массиве невзаимодействующих нанотрубок (см. [12], рис. 1), где фазовая скорость v равнялась скорости света в среде $v = c/\sqrt{\epsilon}$ (реализуется плоский фронт излучения). При этом сами поверхностные токи генерируются с помощью мощных коротких электрических импульсов и определяют величину поляризуемости нанотрубок. Работа [13] является обобщением работы [12] на случай, когда фазовая скорость v больше скорости света в среде $v > c/\sqrt{\epsilon}$. В отличие от работ [12, 13], в которых рассмотренные трехмерные 3D структуры из массива нанотрубок имели цилиндрическую форму, в данной работе рассмотрим трехмерные массивы углеродных нанотрубок из предположения, что они изготовлены из α -выровненных пленок [15] с расположенными на них углеродными нанотрубками (двумерные массивы).

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗАДАНЫМИ ТОКАМИ БЕГУЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ НА ОСНОВЕ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ

Рассмотрим задачу распространения волны Т-типа типа в коаксиальном волноводе в цилиндрической системе отсчета. Для такой волны можно ввести понятие волны напряжения и волны тока. Волна напряжения определяет осесимметричную (радиальную) напряженность электрического поля, которое совпадает с напряженностью поля в цилиндрическом конденсаторе. Волна продольного тока определяет азимутальную напряженность магнитного поля. Напряженность электрического и магнитного полей выражаются через величину тока, т. е. эти поля линейно зависимы. Т-волну можно получить с помощью мощных коротких электрических импульсов.

Выпишем уравнения Максвелла в вакууме [22, 23]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= c^{-1} \partial \mathbf{E} / \partial t, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{H} / \partial t, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ – электрическое и магнитное поля, c – скорость света в вакууме. Решение для системы

уравнений (1) в случае коаксиального волновода получим исходя из электрического вектора Герца $\mathbf{\Pi} = \mathbf{e}_z \Pi$ [22–24] (в случае вакуума)

$$\begin{aligned} \varphi &= -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{A} = c^{-1} \partial \mathbf{\Pi} / \partial t, \\ \mathbf{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} - c^{-2} \partial^2 \mathbf{\Pi} / \partial t^2, \\ \mathbf{H} &= c^{-1} \partial \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} / \partial t = -i \operatorname{krot} \mathbf{\Pi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где c – скорость света в вакууме. Подставим векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ из (2) в уравнения (1), в результате получим уравнение для вектора Герца в вакууме

$$\partial^2 \Pi / \partial z^2 + \Delta_{\perp} \Pi - c^{-2} \partial^2 \Pi / \partial t^2 = 0, \quad (3)$$

где $\Delta \Pi = \partial^2 \Pi / \partial z^2 + \Delta_{\perp} \Pi$, $\Delta_{\perp} = \rho^{-1} \partial (\rho \partial / \partial \rho) + \rho^{-2} \cdot \partial^2 / \partial \phi^2$ – поперечный оператор Лапласа. Так как для волны Т-типа продольная компонента для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ равна нулю, то из (3) и выражения для $\mathbf{E}$ из (2) следует, что $\Delta_{\perp} \Pi = 0$. Равенство нулю поперечного лапласиана от вектора Герца в (3) приводит к решению в виде бегущей волны

$$\begin{aligned} \partial^2 \Pi / \partial z^2 - c^{-2} \partial^2 \Pi / \partial t^2 &= 0, \\ \Leftrightarrow \Pi &= \Pi_0 f(t - z/c) \ln \rho, \end{aligned} \quad (4)$$

где максимальное значение произвольной функции f равняется $\max[f(\eta)] = 1$. Из (4) следует

$$H_{\phi} = -\frac{\Pi_0}{c\rho} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad E_{\rho} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} = -\frac{\Pi_0}{c\rho} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5)$$

Из (5) с учетом краевых условий получим выражение для волны напряжения U и волны тока I

$$\begin{aligned} U &= U_0 g\left(t - \frac{z}{c}\right) \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad I = I_0 g\left(t - \frac{z}{c}\right), \\ I_0 &= -\frac{\Pi_0}{2}, \quad U_0 = \frac{\Pi_0}{c}. \end{aligned} \quad (6)$$

где $g = \partial f / \partial t$.

3. ГЕНЕРАЦИЯ СВЧ- И ТЕРАГЕРЦОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ НА ОСНОВЕ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ НАЛИЧИИ МАССИВА (ПУЧКА) НАНОТРУБОК

Пусть внутри двух коаксиальных цилиндров находится массив (пучек) УНТ. Пусть нанотрубки выровнены параллельно радиус-вектору в цилиндрической системе координат. В этом случае бегущая электрическая волна E_{ρ} из (5) будет параллельна оси УНТ, и будет выполнять роль возмущающего на них внешнего поля, которое индуцирует поверхностную плотность тока $j_{\rho} = \sigma E_{\rho}(\rho)$ в УНТ, где σ – поверхностная проводимость в

УНТ. В этом случае плотность тока в нулевом приближении в разложении по малому параметру $1/X$ запишется в виде уравнения Леонтовича—Левина [25]. Полученное значение поверхностного тока в нанотрубках в свою очередь в волноводе приводит к генерации излучения Вавилова—Черенкова. В этом случае волновое уравнение запишем исходя из 4-потенциала A^i с учетом внешнего электрического поля из (5). С учетом уравнений Максвелла (1) получим волновые уравнения в среде [26]

$$\Delta A_p(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} = -\mathbf{e}_r \frac{4\pi}{c} j_p, \quad (7)$$

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon_{\text{eff}}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0,$$

где второе уравнение — это калибровка Лоренца, $v = c/\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}$, ϵ_{eff} — эффективная диэлектрическая проницаемость в среде из массива нанотрубок [9, 13]; $\mu_{\text{eff}} = 1$; A_p — радиальная компонента вектора $\mathbf{A}$ в цилиндрической системе координат.

В соответствии с [15] α — выровненные УНТ с удлиненными углеродными наночастицами называются пленками, в которых наночастицы параллельны поверхности пленки, β — выровненные нанопленки называются пленки, в которых наночастицы перпендикулярны поверхности пленки. Рассмотрим по аналогии с работой [14] трехмерную структуру, образованную удлиненными нанотрубками, которую можно представить как стык пленок из УНТ. В отличие от работы [14] вместо тетрагональной решетки рассмотрим трехмерную структуру, в которой нанотрубки в нанопленках параллельны радиусу в цилиндрической системе координат, т. е. рассмотрим невыровненные на-

ноplenки. Пусть центры масс УНТ в нанопленках имеют координаты $(m_p \Delta p, m_\phi \Delta \phi)$, где m_p, m_ϕ — целые числа. Расстояние между нанопленками $\Delta z = \text{const}$. Поляризация, создаваемая одноточечным диполем, может быть выражена с помощью трехмерной дельта-функции $\delta^{(3)}$.

Амплитуду плотности тока $j_{0,p}$ для 3D структуры можно представить по аналогии с работой [14] в виде (свободные заряды отсутствуют)

$$j_{0,p}(t, \mathbf{r}) = \sum_{m_p, m_\phi, m_z} F(\rho_{m_p}, m_z \Delta z) \frac{\partial d_0}{\partial t} \times \delta(z - vt - m_z \Delta z) \delta^{(2)}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}_{m_p, m_\phi}) \cos[\phi - \phi_{m_\phi}], \quad (8)$$

где скорость бегущей волны в случае полного заполнения коаксиального волноводного канала нанотрубками будет равна v . В случае частичного заполнения волноводного канала реализуется волновод по аналогии со своведущей сердцевиной. В этом случае фазовая скорость определяется постоянной распространения и больше скорости света в среде (сердцевине [27], что соответствует условию генерации излучения Черенкова. В (8) вектор $\mathbf{\rho}_{m_p, m_\phi} = (\rho_{m_p}, \phi_{m_\phi})$, где $\rho_{m_p} = m_p \Delta p$, $\phi_{m_\phi} = m_\phi \Delta \phi$, означает координату центра инерции УНТ на нанопленке; $\mathbf{r} = (\rho, z)$, $\mathbf{\rho} = (\rho, \phi)$; d_0 — максимальное значение дипольного момента отдельной трубки; $d_0 F(\rho_{m_p}, m_z \Delta z)$ — форм-фактор, определяющий величину распределение дипольного момента d в зависимости от индекса m_p и m_z ; $\delta^{(2)}$ — двумерная дельта-функция. В (8) суммирование ведется по всем возможным значениям индексов m_p, m_ϕ, m_z . Введем функцию

$$\mathcal{R}_n(\rho) = \frac{J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho)}{\left[2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho [J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho)]^2 d\rho \right]^{1/2}} =$$

$$= i \frac{H_0^{(1)}(\mathcal{H}_n \rho) H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n R_1) - H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n \rho) H_0^{(1)}(\mathcal{H}_n R_1)}{2 \left[2\pi R_1 \int_{R_1}^{R_2} \rho (J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho))^2 d\rho \right]^{1/2}}, \quad (9)$$

удовлетворяющий уравнению $\Delta_\perp \mathcal{R}_n(\rho) = -\mathcal{H}_n^2 \mathcal{R}_n$ (выполняются равенства $\Delta_\perp J_0(\mathcal{H}_n \rho) = -\mathcal{H}_n^2 J_0(\mathcal{H}_n \rho)$ или $\Delta_\perp N_0(\mathcal{H}_n \rho) = -\mathcal{H}_n^2 N_0(\mathcal{H}_n \rho)$, где $J_0(\zeta)$ и $N_0(\zeta)$ —

функции Бесселя и Неймана нулевого порядка). Для $\mathcal{R}_n$ выполняются граничные условия $\mathcal{R}_n(\rho = R_1) = 0$. Величину $\mathcal{H}_n$ выберем из условия

$\mathcal{R}_n(\rho = R_2) = 0$. В дальнейшем решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} A_p(t, \mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \bar{A}_p^{(n)}(t, z) \mathcal{R}_n(\rho), \\ j_{0,p}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_n \bar{j}_{0,p}^{(n)}(t, z) \mathcal{R}_n(\rho), \end{aligned} \quad (10)$$

где величину $\mathcal{A}_n$ и функцию $\bar{j}_{0,p}(t, z)$ вычислим исходя из условия ортогональности $2\pi \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n \mathcal{R}_k \rho d\rho = \delta_{nk}$ волновой функции $\mathcal{R}_n(\rho)$ поперечной n -моды

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \int_0^{2\pi} \left[\int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho) \delta^{(2)}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}_{m_p, m_\phi}) \rho d\rho \right] \cdot \\ &\cdot \cos(\phi - \phi_{m_\phi}) d\phi = \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}), \quad \bar{j}_{0,p}^{(n)}(t, z) = \\ &= \sum_{m_p, m_\phi, m_z} F(\rho_{m_p}, m_z \Delta z) \frac{\partial d_0}{\partial t} \delta(z - vt - m_z \Delta z), \\ &\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{H}_n^2 \right] \bar{A}_p^{(n)}(t, z) = \\ &= -\frac{4\pi}{c} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \bar{j}_{0,p}^{(n)}(t, z), \end{aligned} \quad (11)$$

где δ_{nk} – дельта-символ Кронекера. Преобразования Фурье для векторного $\bar{A}_p^{(n)}$ и скалярного $\bar{\varphi}^{(n)}$ потенциалов, а также преобразования Фурье для плотности тока $\bar{j}_{0,p}^{(n)}$ равны

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p(\omega, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \bar{A}_p^{(n)}(t, z) \exp[i(\omega t - k_z z)] dz, \\ \tilde{\varphi}(\omega, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \bar{\varphi}^{(n)}(t, z) \exp(i\omega t - ik_z z) dz, \\ \tilde{j}_{0,p}(\omega, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \bar{j}_{0,p}^{(n)}(t, z) \exp(i\omega t - ik_z z) dz, \end{aligned} \quad (12)$$

где при выводе в соответствии с (11) учтено, что $\mathcal{A}_n = \mathcal{R}_n(\rho_{m_p})$

Из (11)–(13) получим Фурье-образ функции $\bar{A}_{p,n}(t, z)$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p(\omega, k_z) &= -i \frac{2\omega d_0 \delta(\omega - k_z v)}{c(k_z^2 + \mathcal{H}_n^2 - \omega^2/v^2)} \cdot \\ &\cdot \sum_{m_p, m_\phi, m_z} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) F(\rho_{m_p}, m_z \Delta z) \exp[-ik_z m_z \Delta z]. \end{aligned} \quad (14)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие равенства

$$\begin{aligned} \sum_{m_z} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) F(\rho_{m_p}, m_z \Delta z) \exp[-ik_z m_z \Delta z] &= \\ = \frac{1}{\Delta z} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) F(\rho_{m_p}, \xi) \exp[-ik_z \xi] d\xi &= \\ = \frac{2\pi}{\Delta z} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \bar{F}(\rho_{m_p}, k_z), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\xi = m_z \Delta z$. С учетом (15) выражение (14) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p(\omega, k_z) &= -i \frac{2\omega d_0 \delta(\omega - k_z v)}{c(k_z^2 + \mathcal{H}_n^2 - \omega^2/v^2)} \frac{2\pi}{\Delta z} \frac{2\pi}{\Delta \phi} \cdot \\ &\cdot \sum_{m_p} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \cdot \bar{F}(\rho_{m_p}, k_z) = \\ &= -i \frac{2\omega d_0 \delta(\omega - k_z v)}{c(k_z^2 + \mathcal{H}_n^2 - \omega^2/v^2)} \cdot \\ &\cdot \frac{2\pi}{\Delta z} \frac{2\pi}{\Delta \phi} \frac{1}{\Delta \rho} \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \cdot \bar{F}(\rho_{m_p}, k_z) d\rho_{m_p}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) следует, что

$$\begin{aligned} A_p(t, \mathbf{r}) &= \mathcal{R}_n(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_p(\omega, k_z) \cdot \\ &\cdot \exp(ik_z z) dk_z = -i \frac{8\pi^2 d_0}{c \Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \mathcal{R}_n(\rho) \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \omega \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \cdot \\ &\cdot \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \cdot \bar{F}(\rho_{m_p}, \omega/v) d\rho_{m_p} d\omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Из калибровки Лоренца (7) по аналогии с работой [14]

$$\varphi = -i \frac{c}{\omega \epsilon_{\text{eff}}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_p). \quad (18)$$

Из (17) с учетом (18) следует выражение для вектора магнитного и электрического полей

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{e}_\rho \frac{1}{c} \frac{\partial A_\rho}{\partial t} - \mathbf{e}_\phi \text{grad}\phi, \quad (19)$$

где $\mathbf{e}_\rho$ и $\mathbf{e}_\phi$ – базисные векторы в полярной системе координат. С учетом равенства ([28], стр. 381)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} C(t) D(t) dt = \\ & = 2\pi \int_0^{\infty} [\tilde{C}(\omega) \tilde{D}^*(\omega) + C^*(\omega) \tilde{D}(\omega)] d\omega, \end{aligned} \quad (20)$$

по аналогии с работой [14] получим в цилиндрической системе координат выражение для z - и для ρ -компонент плотности потока энергии (вектора Пойнтинга)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} S_z(t, \rho \geq R_2) dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho(t) H_\phi(t) dt = \\ & = \frac{c}{2} \int_0^{\infty} [\tilde{E}_\rho(\omega) \tilde{H}_\phi^*(\omega) + \tilde{E}_\rho^*(\omega) \tilde{H}_\phi(\omega)] d\omega. \end{aligned} \quad (21)$$

Для вычисления радиальной составляющей вектора Пойнтинга нужно исходя из (19) вычис-

лить z -компоненту электрического поля и ϕ -компоненту магнитного поля

$$\begin{aligned} E_z(t, z) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) \Big|_{\rho=R_2} = \\ &= i \frac{8\pi^2 d_0}{c \Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \mathcal{R}_n(\rho)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \omega \cdot \\ &\quad \cdot \exp[-i\omega(t - z/v)] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_\rho}) \cdot \bar{F}(\rho_{m_\rho}, \omega/v) d\rho_{m_\rho} \right] \cdot \\ &\quad \cdot d\omega, \quad H_\phi(t, z) = (\text{rot}\mathbf{A})_\phi = i \frac{\omega}{v} A_\rho(t, \mathbf{r}) = \\ &= \frac{8\pi^2 d_0}{c \Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \mathcal{R}_n(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v^2} \omega^2 \exp[-i\omega(t - z/v)] \\ &\quad \cdot \left[\int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_\rho}) \cdot \bar{F}(\rho_{m_\rho}, \omega/v) d\rho_{m_\rho} \right] d\omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) с учетом (20) получим выражение для интеграла по времени от ρ -компоненты плотности потока энергии

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_\rho(t, \rho) dt &= \frac{1}{2c} \left(\frac{8\pi^2 |d_0|}{\Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{v^3 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \cdot \left| \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_\rho}) \cdot \bar{F}(\rho_{m_\rho}, \frac{\omega}{v}) d\rho_{m_\rho} \right|^2 d\omega \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ -i \left[\mathcal{R}_n^* \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{R}_n(\rho) - \mathcal{R}_n \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{R}_n^*(\rho) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

В (23) величина $\mathcal{R}_n(\rho)$ из (9) является вещественной, что в свою очередь приводит к равенству нулю суммарной плотности потока S_ρ . Такая закономерность означает, что суммарная плотность потока S_ρ складывается из двух взаимно

противоположенных по направлению плотностей потоков энергии $S_\rho^{(1)}$ и $S_\rho^{(2)}$. Запишем выражения выражения для интеграла по времени от ρ -компоненты плотностей потока энергии $S_\rho^{(1)}$ и $S_\rho^{(2)}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_\rho^{(1)}(t, \rho) dt &= \frac{1}{8\pi c} \left(\frac{8\pi^2 |d_0|}{\Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{v^3 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \left| \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_\rho}) \cdot \bar{F}(\rho_{m_\rho}, \frac{\omega}{v}) d\rho_{m_\rho} \right|^2 d\omega \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ -i \frac{\left[\left(H_0^{(1)}(\mathcal{H}_n \rho) \right)^* \frac{\partial}{\partial \rho} H_0^{(1)}(\mathcal{H}_n \rho) - \text{с. с.} \right] \left| H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n R_1) \right|^2}{\left| \int_{R_1}^{R_2} \rho (J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho))^2 d\rho \right|} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_p^{(2)}(t, \rho) dt = \frac{1}{8\pi c} \left(\frac{8\pi^2 |d_0|}{\Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{v^3 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \left| \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \cdot \bar{F}\left(\rho_{m_p}, \frac{\omega}{v}\right) d\rho_{m_p} \right|^2 d\omega \cdot$$

$$\cdot \left\{ -i \frac{\left[\left(H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n \rho) \right)^* \frac{\partial}{\partial \rho} H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n \rho) - \text{с.с.} \right] \left| H_0^{(1)}(\mathcal{H}_n R_1) \right|^2}{\int_{R_1}^{R_2} \rho \left(J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho) \right)^2 d\rho} \right\}. \quad (25)$$

В (24) и (25) выражения в фигурных скобках пропорциональны плотности потока вероятности $\mathbf{S} = -i\hbar(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) / (2m_e)$ в квантовой механике, т.е. в случае эффекта Вавилова–Черенкова роль волновой функции для плотности потока энергии (для вектора Пойнтинга) выполняет функция Ганкеля первого рода $\Psi_1 = H_0^{(1)}(\mathcal{H}_n \rho)$ и второго рода $\Psi_2 = H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n \rho)$. Волновая функция Ψ_1 соответствует расходящейся, а функция Ψ_2 соответствует сходящейся цилиндрическим волнам. С учетом равенства $(H_0^{(1)})^* = H_0^{(2)}$ [29] из (10) следу-

ет, что плотность потоков и энергии ($S_p^{(1)} > 0, S_p^{(2)} < 0$) равны по абсолютной величине, но направлены в противоположенные стороны. Это обуславливается тем, что в рассмотренной задаче в поперечном направлении устанавливается стоячая волна. По мере распространения излучения за счет отражения амплитуда излучения растет прямо пропорционально длине волновода. Суммарный поток Φ_p через боковую поверхность коаксиального волновода длины L будет равен удвоенному потоку энергии за счет величины $S_p^{(1)}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \Phi_p(t, \rho) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \rho S_p(t, \rho) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi \rho S_p^{(1)}(t, \rho) dt = \frac{2}{\pi c} \left(\frac{8\pi^2}{\Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \right)^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 |d_0|^2}{v^3 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \left| \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \cdot \bar{F}\left(\rho_{m_p}, \frac{\omega}{v}\right) d\rho_{m_p} \right|^2 d\omega \left\{ \frac{\left| H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n R_1) \right|^2}{\int_{R_1}^{R_2} \rho \left(J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho) \right)^2 d\rho} \right\}, \quad (26)$$

где при выводе (26) учтено равенство для Вронскиана в случае функции Ганкеля [27]

$$-i \left[\left(H_0^{(1)}(z) \right)^* \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(z) - \text{с.с.} \right] = \frac{4}{\pi z}. \quad (27)$$

Аппроксимируем функцию $F(\rho_{m_p}, \xi)$ из (15) функцией Гаусса и вычислим Фурье-образ этой функции $\bar{F}(\rho_{m_p}, \omega/c)$

$$F(\rho_{m_p}, \xi) = \frac{R_1 + R_2}{2\rho_{m_p}} \exp \left[-\left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right],$$

$$\bar{F}\left(\rho_{m_p}, \frac{\omega}{v}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\rho_{m_p}, \xi) \exp \left[-i \frac{\omega}{v} \xi \right] d\xi = \frac{\xi_0}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_1 + R_2}{2\rho_{m_p}} \exp \left[-\left(\frac{\omega \xi_0}{2v} \right)^2 \right], \quad (28)$$

где $\xi = m_z \Delta z$. В (28) для величин F и $\bar{F}$ появляется зависимость $\sim 1/\rho_{m_p}$, поскольку в соответствии с (5) в цилиндрическом волноводе суще-

ствует зависимость $E_{0,p} \sim 1/\rho_{m_p}$ (в (5) под ρ подразумевается величина ρ_{m_p}). С учетом (28) из (26)

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \Phi_p(t, \rho) dt = \int_0^{\infty} \Omega(\omega) d\omega = \frac{2}{c} \left(\frac{2\pi}{\Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \right)^2 (R_1 + R_2)^2 \cdot \\ & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 |d_0|^2}{v^3 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \exp \left[-\frac{(\omega \xi_0)^2}{2v^2} \right] \left| \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \frac{1}{\rho_{m_p}} d\rho_{m_p} \right|^2 (\xi_0)^2 d\omega \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{|H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n R_1)|^2}{\int_{R_1}^{R_2} \rho (J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho))^2 d\rho} \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\Omega(\omega)$ – спектральная плотность интеграла по времени от полного потока излучения Черенкова.

4. СВЯЗЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОКОВ В УЕДИНЕННЫХ УНТ С ДИПОЛЬНЫМ МОМЕНТОМ ЦИЛИНДРОВ

Воспользуемся для нанотрубок (НТ) в нулевом приближении уравнением Леонтовича–Левина из работы [25]. В этом случае для нулевого члена поверхностной плотности тока $j \equiv j^{(0)}(\rho, z) \sim \exp(ih_0 \rho - i\omega t)$ в разложении по малому параметру $1/X$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(k^2 - \frac{i\omega}{2\pi\sigma_p R X} \right) \right] j^{(0)}(t, z, \rho) = \\ = -\frac{i\omega}{2\pi R X} E_{0p}(t, z), \end{aligned} \quad (30)$$

где большое значение кинетической индуктивности в НТ приводит к тому, что в реактивном сопротивлении можно пренебречь емкостным сопротивлением. Поэтому учет влияния на антенные свойства НТ тепловых потерь эквивалентно замене $(-i\omega L_k \rightarrow -i\omega L_k + R_a)$, где $R_a \approx 10$ КОМ/МКМ – экспериментально полученная в [30] электрическое сопротивление НТ на единицу длины. В (30) $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны в вакууме, c – скорость света в вакууме, σ_p – аксиальная проводимость металлической НТ [9, 25, 30], v_F – скорость π – электрона на уровне Ферми, R – радиус НТ. Величины X и аксиальная проводимость σ_p [9, 25, 30] в металлической (например, типа “седло”) НТ в соответствии с [9, 31].

$$\begin{aligned} X = -2[K_0(\kappa R) I_0(\kappa R)] < 0, \\ \sigma_p \approx i4e^2 v_F / [\pi h R (\omega + i\nu)], \end{aligned} \quad (31)$$

где $\kappa = \sqrt{h_0^2 - k^2}$; $K_0(\xi)$, $I_0(\xi)$ – модифицированные функции Бесселя, $\nu = 1/\tau$, τ – среднее время свободного пробега электрона для УНТ, которое в приближении времени релаксации позволяет

вычислить интеграл столкновения в кинетическом уравнении Больцмана. Перепишем (30) с учетом (31) следующим образом

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \omega^2 \left\{ \frac{1}{c^2} + \frac{\pi}{4\alpha c v_F |X|} \right\} + i \frac{\pi}{4\alpha c v_F |X|} v \omega \right] \times \\ \times j^{(0)} = -\frac{i\omega}{2\pi R X} E_{0p}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры.

Из дисперсионного уравнения Леонтовича–Левина (32) следует волновое уравнение для поверхностной плотности тока

$$\frac{\partial^2 j^{(0)}}{\partial t^2} + v \frac{\partial j^{(0)}}{\partial t} - \beta^2 c^2 \frac{\partial^2 j^{(0)}}{\partial \rho^2} = -\frac{\beta^2 c^2}{2\pi R X} \frac{\partial E_{0p}}{\partial t}, \quad (33)$$

где β – коэффициент задержки

$$\beta^2 = 1 / \left\{ 1 + \frac{\pi c}{4\alpha X v_F} \right\} \approx \frac{4\alpha X v_F}{\pi c} \ll 1. \quad (34)$$

Преобразуем уравнение Леонтовича–Левина (33) для плотности тока в нулевом приближении $j \equiv j^{(0)}(\rho) \sim \exp(ih_0 \rho - i\omega t)$ к виду

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4\alpha v_F c} l \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{(0)}(t, z) + v \frac{\partial}{\partial t} Q^{(0)} \right] + \\ + \frac{\pi \beta^2 h_0^2 c}{4\alpha v_F} l Q^{(0)} = U_{0p}(t, z), \end{aligned} \quad (35)$$

где $j^{(0)} = (2\pi R)^{-1} \partial Q^{(0)} / \partial t$, $U_{0p} = l E_{0p}$, $h_0 = \pi/l$. Из (35) для УНТ длиной l следуют выражения для квантовой индуктивности L_k , для активного электрического сопротивления R_p и для электрической емкости (квантовый кинетический вклад) C_Q УНТ

$$\begin{aligned}
 L_k &= \frac{\pi}{4\alpha v_F c} l = \frac{h}{8e^2 v_F} l, \\
 R_p &= v \frac{\pi}{4\alpha v_F c} l = v \frac{h}{8e^2 v_F} l, \\
 C_Q &= \frac{4\alpha v_F}{\pi \beta^2 h_0^2 c l} \approx \frac{4\alpha v_F}{\pi^3 \beta^2 c^2} l = \frac{8e^2 v_F}{h} \frac{l}{(\pi \beta c)^2}.
 \end{aligned} \quad (36)$$

Из (36) следует, что резонансная частота колебаний в УНТ равняется $\omega_0 = 1/(L_k C_Q)^{1/2} = \pi \beta c/l$, что в свою очередь за счет замедления поверхностных волн приводит к тому, что при оптической длине $l = 10$ мкм будет соответствовать длине волны излучения $\lambda = 2l/\text{Re}\beta \approx 100l$. Известно, что обратное значение кванта проводимости на длине ~ 1 мкм равно $R_a = h/(2e^2) = 12.6$ кОм. В результате из условия реализации высокоэффективных наноантенн [32] (малые физические потери) следует, что $\omega \gg (iR_a)/L_k = 3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, т. е. $\lambda \ll 1.5$ мм. В данной работе рассмотрим частоту $kb = 10^{-6}$. В этом случае $\beta \approx 0.02$, $\lambda \approx 0.95$ мм ($\omega_0 \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$). Соответственно при длине волны $\lambda \approx 1$ мм оптическая длина будет порядка $l = (\lambda \text{Re}\beta)/2 \approx 10$ мкм. Условие $kb = 10^{-6}$ означает, что поверхностные волны не будут слабозатухающими (условие слабого затухания волн [30] $10^{-5} < kb < 10^{-3}$, где $b = 0.142$ мкм – расстояние между атомными центрами в НТ. Следует отметить, что при частоте $kb = 10^{-6}$ и $l = 10$ мкм реактивное емкостное X_C , индуктивное X_L и активное R сопротивления нанотрубки

$$\begin{aligned}
 X_C &= 1/(\omega_0 C_Q) \approx 20 \text{ кОм}, \quad X_L = \omega_0 L_k \approx 84 \text{ кОм}, \\
 R &= 10R_a = 126 \text{ кОм},
 \end{aligned}$$

где в системе СГС и системе СИ

$$\begin{aligned}
 C_Q &= \frac{8e^2 v_F}{h} \frac{l}{(\pi \beta c)^2} (\text{СГС}) = \\
 &= \frac{16v_F \epsilon_0 \alpha}{h} \frac{l}{(\pi \beta)^2 c} (\text{СИ}) = 2.7 \cdot 10^{-17} \text{ Ф}.
 \end{aligned}$$

5. ЭФФЕКТИВНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ МАССИВА НАНОТРУБОК

Для определения эффективной диэлектрической функции (ЭДФ) ϵ_{eff} среды, состоящей из нанотрубок, воспользуемся результатами, которые подробно описаны в работах [14, 33–35]. Пусть диэлектрические частицы характеризуются диэлектрической функцией $\epsilon_1(\omega)$ и коэффициентом

деполяризации n_χ (деполяризующий фактор). Тогда дипольный момент частиц p_χ запишем в виде

$$\begin{aligned}
 d_0 &= \alpha_\chi E_\chi, \quad \tilde{\alpha}_\chi = \frac{\alpha_\chi(\omega)}{V \epsilon_0} (\text{СИ}) = \\
 &= \frac{4\pi \alpha_\chi(\omega)}{V} (\text{СГС}) = \frac{\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2}{\epsilon_2 + n_\chi(\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2)},
 \end{aligned} \quad (37)$$

где α_χ – индивидуальная поляризуемость частицы; ϵ_0 – диэлектрическая постоянная; $\chi(s, p)$ означает, что поляризация параллельна (s-поляризация) или перпендикулярна (p-поляризация) оси НТ. Сами частицы (нанотрубки) аппроксимируем эллипсоидальными частицами (см. [28]). В (37) по аналогии с [36] введена эквивалентная изотропная диэлектрическая функция $\epsilon_1(\omega)$ для анизотропной нанотрубки, где ϵ_2 – диэлектрическая проницаемость внешней среды.

Приближение эффективной среды (ЕМА) справедливо для композитных материалов с плотно и хаотично распределенными частицами [36], а теория Максвелла–Гарнетта (MGT) [37, 38] справедлива для композитных материалов с неплотно и хаотично распределенных частиц. В геометрической модели массивов эффективные диэлектрические функции определяются индивидуальной поляризуемостью частиц α_χ с учетом геометрии массива (геометрического фактора B_χ). Морфологии как теории MGT, так и модели массива не согласуются с плотным и случайным характером этой системы НТ. Приближение MGT используется для анализа распространения электромагнитных волн в гетерогенных средах для определения эффективной диэлектрической проницаемости различных композитных структур, например, в периодических диэлектрических системах [39, 40]. По сравнению с MGT и моделью массива, ЕМА может лучше описывать экспериментальные данные. Приближение ЕМА, также называемое теорией Бруггемана [41, 42], является еще одним методом описания эффективных диэлектрических свойств композитов, в которых частицы всех компонентов случайным образом смешаны вместе. Эта теория широко использовалась для объяснения диэлектрических и оптических свойств композитных материалов [43, 44] и оказалась справедливой при всех концентрациях. В случае модели массива эта модель используется для ансамбля разделенных квантовых точек, которые уложены вертикально с конечным периодом [45].

Поскольку объемная доля f очень мала, то, основываясь на теориях среднего поля, можно записать эффективную диэлектрическую функцию $\epsilon_{\text{eff}}^{\chi, \text{MG}}(\omega)$, используя формулу Максвелла–Гарнетта [36, 46, 47]

$$\epsilon_{\text{eff}}^{\chi, MG} = \epsilon_2 \left[1 + \frac{f(\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2)}{\epsilon_2 + n_\chi(\epsilon_1 - \epsilon_2) - f n_\chi(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \right], \quad (38)$$

где согласно теории среднего поля среднее электрическое поле E_{av} и электрическую индукцию D_{av} можно записать как

$$\epsilon_{\text{eff}}^{\chi, MG} = D_{\text{av}}/(\epsilon_0 E_{\text{av}}), \quad E_{\text{av}} = fE_1 + (1-f)E_2, \quad (39)$$

$$D_{\text{av}} = f\epsilon_1\epsilon_0 D_1 + (1-f)\epsilon_1\epsilon_0 D_2.$$

Среднее внутреннее электрическое поле в частице можно записать с помощью уравнения Лапласа

$$E_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + n_\chi(\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2)} E_2. \quad (40)$$

Формула Максвелла–Гарнетта (38) в основном используется для разбавленных систем.

Если объемная доля не мала, то ЭДФ можно получить исходя из ЕМА [36]

$$f \frac{\epsilon_1 - \epsilon_{\text{eff}}}{\epsilon_{\text{eff}} + n_\chi(\epsilon_1 - \epsilon_{\text{eff}})} + (1-f) \frac{\epsilon_2 - \epsilon_{\text{eff}}}{\epsilon_{\text{eff}} + n_\chi(\epsilon_2 - \epsilon_{\text{eff}})} = 0. \quad (41)$$

С точки зрения электродинамики дискретная структура массива дисперсных частиц эквивалентна сплошному диэлектрическому материалу, характеризованному эффективной диэлектрической функцией (магнитные свойства частиц не учитываются) [16] (более подробно см. в [14])

$$\hat{\epsilon}_{\text{eff}} = \epsilon_2 \left[1 + \frac{4\pi}{\Omega} \hat{g} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \cdot \hat{g} \right)^{-1} \right] = \epsilon_2 \left[1 + \frac{f \cdot \tilde{\alpha}_\chi(\omega)}{1 - f B_\chi \cdot \tilde{\alpha}_\chi} \right], \quad (42)$$

где B_χ – геометрические факторы; $\chi = s, p$ такие, что поляризация выровнена вдоль (s-поляризация) или перпендикулярно (p-поляризация) оси НТ; операторы $\hat{\delta} = \delta_{ii}$ и $g = g_{ii}$ с учетом равенств (37) равны

$$\delta_{11} = -\frac{4\pi}{3} \delta_{xx} = -4\pi B_p, \quad \delta_{22} = -\frac{4\pi}{3} \delta_{yy} = -4\pi B_p,$$

$$\delta_{33} = -\frac{4\pi}{3} \delta_{zz} = -4\pi B_s, \quad (43)$$

$$g_{ii} = \frac{abc}{3} \tilde{\alpha} = \frac{V}{4\pi} \tilde{\alpha}_i = \alpha_i = \frac{V}{4\pi \epsilon_2 + n_i(\epsilon_{ii} - \epsilon_2)},$$

где $i = 1, 2, 3$; $f = 4\pi abc/(3\Omega) = V/\Omega$ – объемная доля. Наличие $\tilde{\alpha}_s$ в выражение (42) подразумевает, что поляризуемость отдельной наночастицы модифицируется за счет присутствия другой наночастицы с учетом его деполяризующего вклада электрического поля, которое действует на этот объект.

Эффективная диэлектрическая функция массива наночастиц зависит от поляризуемости отдельной наночастицы (37) $\tilde{\alpha}_\chi = \alpha_\chi/(V\epsilon_0) = 4\pi\alpha_\chi/V$ и геометрического фактора B_χ , который, в свою очередь, зависит от поляризации падающего света $\chi = s, p$ [16–19]. В случае, когда центры НТ образуют тетрагональную решетку, реализуется частный случай ортогональной решетки $d_2 = d_1$ с параметрами $\tilde{\beta} = d_2/d_1 = 1$, $\gamma = d_3/d_1$, где d_1, d_2, d_3 – постоянные решетки по осям x, y, z , соответственно.

В этом случае

$$\delta_{zz} = \frac{3}{4\pi} \left(18 - \frac{10}{\gamma^2} \right) \text{arctg} \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma^2 + 2}} + \frac{60(1 - \gamma^2)}{\gamma^4} \cdot \text{arctg} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 2}} - 30 \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^4} \ln \left| \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2} + \gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 2} - \gamma} \right|, \quad (44)$$

$$\delta_{xx} = \delta_{yy} = \frac{3}{4\pi} \left(18 + \frac{20}{\gamma^2} - \frac{30}{\gamma^4} \right) \text{arctg} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 2}} + 15 \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^4} \ln \left| \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2} + \gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 2} - \gamma} \right|.$$

В случае, когда центры нанотрубок образуют кубическая решетка ($\tilde{\beta} = \gamma = 1$), из (44) следует $\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1$ ($B_p = B_s = 1/3$).

Формула эффективной диэлектрической функции (42) представляет собой модель Максвелла–Гарнетта с поправкой Клаузиуса–Моссотти (геометрическая модель массивов), поскольку основана на строгом решении уравнений Максвелла в предположении малой плотности включений [16–21]. Отметим, что знаменатель во второй прямоугольной скобке в уравнении (42) представляет собой поправку Клаузиуса–Моссотти, отвечающую за электромагнитное взаимодействие квантовых точек.

Для определения эффективной диэлектрической функции в случае НТ с помощью (42) по аналогии с работами [14, 33, 35] воспользуемся полученной в [20] теоретической зависимостью для поляризуемости индивидуальной нанотрубки из (37) (случай s-поляризации)

$$\tilde{\alpha}_\chi = \frac{\alpha_\chi(\omega)}{V\epsilon_0} (\text{СИ}) = \frac{4\pi\alpha_\chi(\omega)}{V} (\text{СГС}) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu}, \quad (45)$$

где $V = 4\pi a^2 c/3 = \pi R^2 l$ – объем сфероида, $a = b = R\sqrt{3}/2$, R – радиус нанотрубки, $c = l/2$; при определении поляризации отдельной нанотрубки предполагается, что однослойная УНТ – вы-

тянутый сфероид из орторомбического материала; $\bar{\omega}_0 = \omega_p \sqrt{n_\chi} \gg \omega$; в соответствии с [20] плазменная частоты $\omega_p = (4e/a)[v_F/(\pi\hbar)]^{1/2}$ (СГС), $v_F = 3\tau b_0/(2\hbar)$ – скорость Ферми, $b_0 = 0.142$ нм – расстояние между соседними атомами углерода в графене. Для определения эффективной диэлектрической функции с помощью (42) фактор деполяризации (коэффициент деполяризации) n_χ вычислим в соответствии с известной формулой [47] (см. также [48] или [35])

$$n_\chi = \frac{a^2}{c^2} [\ln(2c/a) - 1], \quad (46)$$

где вытянутые нанотрубки аппроксимируем аксиально симметричными вытянутыми сфероидами. При этом большая полуось равна половине высоты нанотрубки $c = l/2$, поперечные размеры сфероиды $a = b = R\sqrt{3}/2$ вычисляются из условия равенства объема частицы и объема сфероиды. При моделировании процесса генерации излучения в трехмерной среде на основе крессельных нанотрубок (m, m) , где $m = 9$. Поляризуемость $\tilde{\alpha}_\chi$ индивидуальной нанотрубки из (45) можно получить с учетом (37). Для этого при $\varepsilon_2 = 1$ нужно воспользоваться равенствами $\varepsilon_1(\omega) - 1 = (4\pi i/\omega)(2\sigma_p/R)$ и $\sigma = i(R/8\pi)[\omega_p^2/(\omega + i\nu)]$ из [21]. В результате получим

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_\chi &= \frac{i\sigma/\omega}{\varepsilon_2 + in_\chi\sigma/\omega} = \\ &= \frac{1}{-i\omega/\sigma + n_\chi} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + i\omega\nu}, \end{aligned} \quad (47)$$

где проводимость индивидуальной нанотрубки с учетом (31) (см. также [21])

$$\begin{aligned} \omega_p &= [2e/R](v_F/\hbar)^{1/2} \text{ (СГС)} = \\ &= 2(\alpha v_F c)^{1/2}/(\pi R) \text{ (СИ)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Из формулы (45) автоматически следует связь между Фурье образом дипольного момента и Фурье-образом бегущей волны напряжения

$$\begin{aligned} d_0(\rho_{m_p}) &= \alpha_\chi(\omega) E = -\frac{V}{4\pi\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + i\omega\nu} \cdot \\ &\cdot E(\rho_{m_p}) = -\frac{V}{4\pi\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + i\omega\nu} \cdot \\ &\cdot \frac{U}{\rho_{m_p} \ln(R_2/R_1)} \text{ (СГС)}, \end{aligned} \quad (49)$$

где в цилиндрической системе координат напряженность поля E и напряжение U связаны $E/U = 1/[r \ln(R^2/R_1^2)]$. С учетом (49) выражение (29) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \Phi_p(t, \rho) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\omega) d\omega = \frac{1}{c} \left(\frac{2\pi}{\Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \right)^2 (R_1 + R_2)^2 \left(\frac{U}{\ln(R_2/R_1)} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{\nu^3 \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}}} \left| \frac{V}{4\pi\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + i\omega\nu} \right|^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega \xi_0}{\nu} \right)^2 \right] \left| \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \xi_0 \frac{1}{\rho_{m_p}^2} d\rho_{m_p} \right|^2 d\omega \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{|H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n R_1)|^2}{\int_{R_1}^{R_2} \rho (J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho))^2 d\rho} \right\} \text{ (СГС)} = \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0}{c} \left(\frac{2\pi}{\Delta z \Delta \phi \Delta \rho \mathcal{H}_n^2} \right)^2 (R_1 + R_2)^2 \left(\frac{U}{\ln(R_2/R_1)} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{\nu^3 \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}}} \left| \frac{V}{4\pi\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + i\omega\nu} \right|^2 \cdot \\ &\cdot \exp \left[-\frac{(\omega \xi_0)^2}{2\nu^2} \right] \left| \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{R}_n(\rho_{m_p}) \xi_0 \frac{1}{\rho_{m_p}^2} d\rho_{m_p} \right|^2 d\omega \left\{ \frac{|H_0^{(2)}(\mathcal{H}_n R_1)|^2}{\int_{R_1}^{R_2} \rho (J_0(\mathcal{H}_n \rho) N_0(\mathcal{H}_n R_1) - J_0(\mathcal{H}_n R_1) N_0(\mathcal{H}_n \rho))^2 d\rho} \right\} \text{ (СИ)}, \end{aligned} \quad (50)$$

где учтено, что напряженности полей в системах

$$\text{СГС и СИ связаны } |E_{\text{СГС}}|^2 = 4\pi\varepsilon_0 |E_{\text{СИ}}|^2$$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

При проведении расчетов полагалось, что $\xi_0 = 3$ мм [5]; $R_1 = 1$ см, $R_2 = 3$ см; $c =$

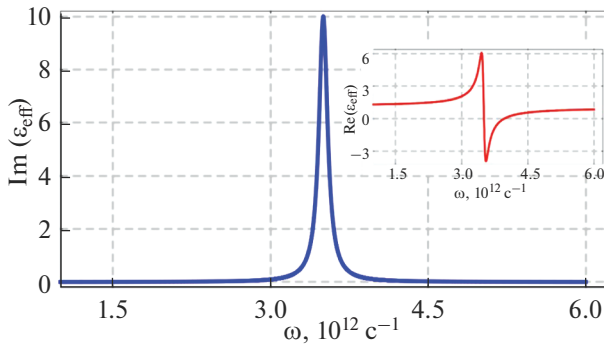


Рис. 1. Эффективная диэлектрическая функция ϵ_{eff} .

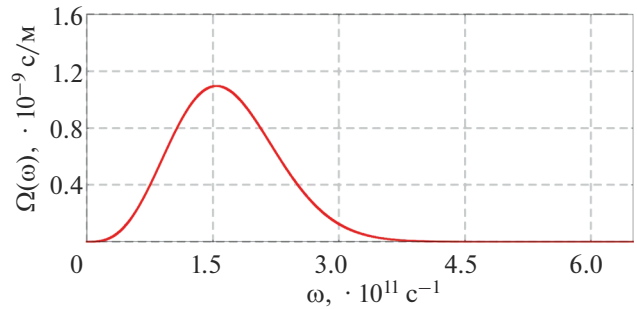


Рис. 2. Спектральная зависимость интеграла по времени от полного потока излучения Черенкова.

$3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф м⁻¹ – электрическая постоянная. Для УНТ ($m, 0$) при $m = 9$ радиус нанотрубки $R = 3bm/(2\pi) \approx 0.61$ нм. Геометрический фактор для тетрагональной решетки $B = 0.13$.

В первом случае длина УНТ $l = 10$ мкм; расстояние между центрами нанотрубок вдоль оси OZ , вдоль азимута и вдоль радиуса в цилиндрической системе координат (вдоль орт цилиндрической системы координат) равняется $\Delta z = d_1 = 0.1l$, $(R_1 + R_2)\Delta\phi = 2d_2 = 0.2l$, $\Delta\rho = d_3 = 2l$. В этом случае в соответствии с (44) массив нанотрубок внутри коаксиального волновода аппроксимируем тетрагональной решеткой (предполагаем, что центры нанотрубок образуют тетрагональную решетку) с параметрами $\beta = d_2/d_1 = 1$, $\gamma = d_3/d_1 = 20$. При $m = 9$ объемная доля $f \approx (\pi R^2)/(2d_1^2) \approx 5.84 \cdot 10^{-8}$. Величина эффективной диэлектрической проницаемости в соответствии с рис. 1 равнялась $\epsilon_{\text{eff}} = 1.286$.

Для первого случая на рис. 1 приведена зависимость эффективной диэлектрической функции $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)$. Кривая 1 (синяя кривая) соответствует мнимой части, а кривая 2 на иконке (красная кривая) соответствует реальной части эффективной диэлектрической функции.

Из результатов расчетов следует, что выражение для интеграла по времени от ρ -компоненты потока энергии M_1 из (50) (или из (29)) через боковую поверхность цилиндра единичной длины для рассматриваемого случая равняется

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\rho}(t, \rho = R_2) / L dt = 168.4 \text{ Дж/м.} \quad (51)$$

На рис. 2 приведена зависимость спектральной плотности $\Omega_1(\omega)$ для первого случая, которая соответствует величине M из (50). Максимальное

значение частоты излучения $\omega_{\text{max}} \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, что соответствует длине волны излучения в вакууме $\lambda \approx 1.26$ см.

Для второго и третьего случаев при уменьшении длины нанотрубок в массиве в два и в четыре раза при неизменной концентрации величина $\omega = \omega_{\text{max}}$, при которой достигается максимальные значения у функций $\Omega_2(\omega)$ и $\Omega_3(\omega)$, практически не менялась. При этом величины M_2 и M_3 из (50) равнялись $M_2 = 2.97$ Дж/м и $M_3 = 0.054$ Дж/м, соответственно.

В четвертом случае величина ω_{max} также оставалась неизменной, также при одновременном уменьшении трех величин $l \rightarrow l/2$, $\Delta\rho \rightarrow \Delta\rho/2$, $\Delta\phi \rightarrow \Delta\phi/2$ относительно первого случая, а величина M равнялась $M_4 = 47.51$ Дж/м.

В пятом случае при одновременном изменении четырех параметров $l \rightarrow l/2$, $\Delta\rho \rightarrow \Delta\rho/2$, $\Delta\phi \rightarrow \Delta\phi/2$, $\Delta z \rightarrow \Delta z/2$ практически не менялась как величина ω_{max} , так практически и величина $M_5 = 190$ Дж/м относительно первоначального состояния массива наночастиц. На иконке приведена зависимость спектральной плотности $\Omega_1(\omega)$, $\Omega_2(\omega)$, $\Omega_3(\omega)$, $\Omega_4(\omega)$, $\Omega_5(\omega)$, соответствующие величинам M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_5 .

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные в работе закономерности для функции спектральной плотности при $\omega = \omega_{\text{max}} \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ объясняется параметрами тетрагональной решетки и геометрическими размерами нанотрубок. В (50) выполняется условие $\omega \ll \bar{\omega}_0 \ll \omega_p$, где $\omega_p = 2.676 \cdot 10^{15}$, $\bar{\omega}_0 = \omega_p \sqrt{n_{\chi}} = (1.23-4.56) \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $n_{\chi} \approx (2.121-28.99) \cdot 10^{-7}$. Такая закономерность приводит для слагаемого из (50) $\omega_p^2 / |\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + i\omega\nu|^2 \approx 1/n_{\chi}$, т.е. $\Omega(\omega) = \omega^3 \cdot$

$\cdot \exp\left[-(\omega\xi_0)^2/(2\nu^2)\right]$. Максимальное значение такой функции будет в точке $\omega = \omega_{\max} \approx \sqrt{3}\nu/\xi_0 \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.

Приблизительное равенство величин $\mathcal{M}_1 \approx \mathcal{M}_5$ объясняется тем, что при преобразовании параметров $l \rightarrow l/2$, $\Delta\rho \rightarrow \Delta\rho/2$, $\Delta\varphi \rightarrow \Delta\varphi/2$, $\Delta z \rightarrow \Delta z/2$ величина $V\omega_p^2/(\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + i\omega\nu)^2 \approx (V/n_\chi)^2 \sim l^6$ из (5.14) уменьшается в 64 раза. На такую же величину увеличивается величина $(\Delta z \Delta\varphi \Delta\rho)^{-2}$ из (50). Такими же оценками объясняются значения величин $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_4$. Ситуация начнет меняться при $l \approx 1 \text{ мкм}$. В этом случае начинает выполняться условие $\omega_{\max} \approx \bar{\omega}_0$, в результате чего будет выполняться $\Omega(\omega) \sim \omega \exp\left[-(\omega\xi_0)^2/(2\nu^2)\right]$, т. е. $\omega_{\max} \approx 1 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.

Величину $\mathcal{M}$ из (50) можно увеличить, если увеличить время релаксации $\tau = 1/\nu$ в кинетическом уравнении Больцмана. Время релаксации вычисляется по формуле [49]

$$\tau = \frac{10m_c\omega_L \sinh(\hbar\omega_L/(k_B T))}{3\sqrt{3}q_0^2 J_0}, \quad (52)$$

где m_c – масса атома углерода, $\hbar\omega_L \approx 0.113 \text{ эВ}$ – энергия продольного акустического фонона, $q_0 \approx 2.5 \text{ Å}^{-1} = 2.5 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $J_0 = 2.2 \text{ эВ}$. При $k_B T = 0.025 \text{ эВ}$ из (52) следует

$$\sinh(\hbar\omega_L/(k_B T)) \approx 46, \\ 10m_c\omega_L/(3\sqrt{3}q_0^2 J_0) \approx 3 \cdot 10^{-14}, \quad \tau \approx 1.38 \cdot 10^{-12} \text{ с}.$$

В работе [49] как и в [50] рассчитаны величина вероятности поглощения (испускания) в единицу времени продольного (поперечного) фонона в единицу времени и длины в случае геликоидальной траектории. Результаты, полученные в [49], применительно к УНТ эквивалентны результатам [50]. В этом случае, в соответствии с результатами [50], значение τ приблизительно равно $\tau \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ с}$. Экспериментально обнаружено в работе Танса и др. [51], что время релаксации составляет $\tau \approx 3.3 \cdot 10^{-13} \text{ с}$. В [52] как и в [53] было рассчитано значение вероятности поглощения (испускания) за единицу времени продольного (поперечного) фонона за единицу времени и длину винтовой траектории. В [52] значение τ приблизительно равно $\tau \approx 2.2 \cdot 10^{-12} \text{ с}$. Если температура среды, в которой находятся нанотрубки, уменьшится до $k_B T = 0.0125 \text{ эВ}$, то согласно (52) получим $\tau \approx 1.3 \cdot 10^{-10} \text{ с}$ [35].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В коаксиальном волноводе с радиусами $R_1 = 1 \text{ см}$ и $R_2 = 3 \text{ см}$, в качестве диэлектрической среды была рассмотрена тетрагональная решетка из УНТ. Внутри волноводного канала массива УНТ получены значения величин: объемная доля $f = 5.84 \cdot 10^{-8}$, деполяризующий фактор $n_z = 2.12 \cdot 10^{-7}$, геометрический фактор $B_z = 0.13$, плазменная частота $\omega_p = 2.68 \cdot 10^{15}$. Возбуждение поверхностных токов $I \sim 10^{-5} \text{ А}$ в УНТ достигается за счет Т-волны в коаксиальном волноводе. Исходя из механизма генерации свертзлучения (излучения Черенкова) получено, что в коаксиальном цилиндрическом волноводе на единицу длины генерируется 168.4 Дж/м. Рассмотренную задачу по аналогии с работой [5] можно обобщить на случай периодических токов в Т-волне за счет изменения концентрации УНТ (за счет периодичности объемной доли).

БЛАГОДАРНОСТЬ

Авторы статьи благодарят Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ за поддержку, оказанную в рамках Программы повышения конкурентоспособности “Проект 5-100” (договор № 02.a03.21.0005.27.08.2013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. Marshall T.C. Free-Electron Lasers. 1985. New York: MacMillan.
2. Gilmour Jr. A.S. Principles of Traveling Wave Tubes. 1994. Norwood: Artech House.
3. Belyantsev A.M., Kozyrev A.B. // J. Tech. Phys. 2000. V. 45 (6). 2000. P. 747.
4. Ginzburg N.S., Novozhilova N.Yu., Zotova I.V., et al. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 3297.
5. Ginzburg N.S., Cross A.W., Golovanov A.A., Mesyats G.A., et al. // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 115. P. 114802.
6. Novoselov A, Geim. S., Morozov D., Jiang Y., et al. // Science. 2004. V. 306. P. 666.
7. Nemilentsau A.M., Shuba M.V., Slepyan G.Y., et al. // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. P. 235424.
8. Kanygin M.A., Sedelnikova O.V., Asanov I.P., et al. // J. Appl. Phys. 2013. V. 113. P. 144315.
9. Slepyan G.Y., Maksimenko S.A., Lakhtakia A., et al. // Phys. Rev. B. 1999. V. 60. P. 17136.
10. Batrakov K., Saroka V., Maksimenko S., Thomsen C. // J. Nanophotonics. 2012. V. 6. P. 061719.
11. Batrakov K., Maksimenko S. // Phys. Rev. B. 2017. V. 95. P. 205408.
12. Sadykov N.R., E.A. Akhlyustina, D.A. Peshkov // Theor. Math. Phys. 2015. V. 184 (2). P. 1163.
13. Sadykov N.R., Aporoski A.V. // Theor. Math. Phys. 2016. V. 188. P. 1109.

14. *Sadykov N.R., Aporoski A.V.* // Opt. Quantum Electron. 2019. V. 51. P. 96.
15. *Deheer W.A. et al.* // Science. 1995. V. 268. P. 845.
16. *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. 1986. Киев: Наукова думка.
17. *García-Vidal F.J., Pitarke J.M., Pendry J.B.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 4289.
18. *Tasaki S., Maekawa K., Yamabe T.* // Phys. Rev. B. 1998. V. 57. P. 9301.
19. *Lakhtakia A., Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A., Guskov A.V.* // Carbon 1998. V. 36. P. 1833.
20. *Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A., Kalosha V.P., Herrmann J.* // Phys. Rev. B. 1999. V. 59. P. 12275.
21. *Slepyan G.Ya., Shuba M.V., Maksimenko S.A., Thomson C.* // Phys. Rev. B. 2010. V. 81. P. 205423.
22. *Samarskii A.A., Tikhonov A.N.* // J. Tech. Phys. 1947. V. 17 (11). P. 1283.
23. *Samarskii A.A., Tikhonov A.N.* // J. Tech. Phys. 1947. V. 17 (12). P. 1431.
24. *Самарский. А.А., Тихонов. А.Н.* Уравнения математической физики. 1977. Москва: Наука.
25. *Marshall T.C.* Free-Electron Lasers. 1985. New York: MacMillan.
26. *Slepyan G.Ya., Shuba M.V., Maksimenko S.A., Lakhtakia A.* // Phys. Rev. B. 2006. V. 73. P. 195416.
27. *Болотовский Б.М.* // Успехи физических наук. 1957. Т. 62 (3). С. 201–246.
28. *Дьячков П.Н.* Электронные свойства и применение нанотрубок. 2015. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний.
29. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd Ed. 1944. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
30. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Course of Theoretical Physics. Electrodynamics of Continuous Media. 1960. Oxford: University Press. V. 8.
31. *Burke P., Li S., Yu Z.* // IEEE Trans. Nanotechnol. 2006. V. 5 (4). P. 314.
32. *Maksimenko S.A., Slepyan L.I.* // J. Commun. Technol. Electron. 2002. V. 47 (3). P. 261–268.
33. *Hagmann M.J.* // IEEE Trans. Nanotechnol. 2005. V. 4 (2). P. 289.
34. *Sadykov N.R., Aporoski A.V.* // Int. J. Mod. Phys. B. 2017. V. 31. P. 1750017.
35. *Sadykov N.R., Peshkov D.A., Aporoski A.V., Belonenko M.B.* // Int. J. Mod. Phys. B. 2020. V. 34 (21). 2020. P. 2050202.
36. *Sadykov N.R., Pilipenko I.A., Jolnirov S.E.* // Opt. Quantum Electron. 2022. V. 54. P. 36.
37. *Lü W., Dong J., Li Z.-Y.* // Phys. Rev. B. 2000. V. 63. P. 033401.
38. *Maxwell-Garnett J.C.* // Philos. Trans. R. Soc. 1904. V. 203. P. 385.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1904.0024>
39. *Wood D.M., Ashcroft N.W.* // Philos. Mag. V. 35. 1977. P. 269.
40. *Datta S., Chan C.T., Ho K.M., Soukoulis C.M.* // Phys. Rev. B. 1993. V. 48. P. 14936.
41. *Tao R., Chen Z., Sheng P.* // Phys. Rev. B. 1990. V. 41. P. 2417.
42. *Bruggeman D.A.G.* // Ann. Phys. (Berlin, Ger.) 1935. V. 416. P. 636.
43. *Landauer R.* // AIP Conf. Proc. 1978. V. 40. P. 2.
<https://doi.org/10.1063/1.31150>
44. *Niklasson G.A., Granqvist C.G.* // J. Appl. Phys. 1984. V. 55. P. 3382.
45. *Berthier S.* // Ann. Phys. (Paris, Fr.). 1988. V. 13. P. 503.
46. *Savinskii S.S., Khokhryakov N.V.* // J. Exp. Theor. Phys. 1997. V. 84. P. 1131.
47. *Garnett J.C.M.* // Philos. Trans. R. Soc. A. Math. Phys. Eng. Sci. 1904. V. 203. P. 385.
48. *Markel V.A.* // J. Opt. Soc. Am. A. 2016. V. 33. P. 1244.
<https://doi.org/10.1364/JOSAA.33.001244>
49. *Grachev G.N., Zemlyanov A.A., Ponomarenko A.G., et al.* // Atmos. Oceanic Opt. 2014. V. 27 (2). P. 115.
50. *Jishi R.A., Dresselhaus M.S., Dresselhaus G.* // Phys. Rev. B. 1993. V. 48 (15). P. 11385.
51. *Tans S.J., Devoret M.H., Dai H., et al.* // Nature. 1997. V. 386. P. 474.
52. *Kibis O.V.* // Phys. Solid. State. 2001. V. 43. P. 2336.
53. *Borondics F., Kamarás K., Nikolou M., et al.* // Phys. Rev. B. 2006. V. 74. P. 045431.

Generation of Microwave Radiation in a Coaxial Cylindrical Waveguide Based on an Array of Extended Nanotubes Forming a Three-Dimensional Structure

N. R. Sadykov¹, * and I. E. Shakirov¹

¹*Snezhinsky Institute of Physics and Technology, Branch of the National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk, Chelyabinsk oblast, 456776 Russia*

*e-mail: n.r.sadykov@rambler.ru

Received April 30, 2025; revised April 30, 2025; accepted May 15, 2025

Abstract—We investigate the mechanism generation of Cherenkov superradiance, whose source is modulated variable surface currents in Array of elongated nanotubes forming a 3D structure. The envelope velocity of currents in nanotubes is greater than the speed of light in a coaxial waveguide medium. The surface currents are generated using powerful short electric pulses ($z - vt$) in a cylindrical waveguide. The effective permittivity is determined based on the Maxwell–Garnett model in the Clausius–Mossotti approximation.

Keywords: Cherenkov radiation, the array of nanotube, the effective medium approximation, the dipole, Maxwell–Garnett model, the Clausius–Mossotti approximation