ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА И ИНЖИНИРИНГ, 2020, том 11, № 4, с. 219–224

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 538.9

КРИСТАЛЛЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ В КОМПАКТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

© 2020 г. С. Д. Мостовой[a], *, О. В. Павловский[a, b], **

[a]*Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991 Россия*

[b]*НИЦ "Курчатовский Институт" – ИТЭФ, Москва, 117218 Россия*

**E-mail: sd.mostovoy@physics.msu.ru*

***E-mail: ovp@goa.bog.msu.ru*

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.
После доработки 05.08.2020 г.
Принята к публикации 05.08.2020 г.

В данной работе исследуются изменения топологических свойств четырехмерной компактной электродинамики на решетке. Требование компактности модели приводит к возникновению топологических дефектов (монополей), создающих магнитные токи. Существующие вычисления продемонстрировали наличие фазового перехода по рождению монополей. В данной работе обнаружены фазовый переход между различными состояниями внутри этой фазы и указания на возможность разделения единой "монопольной" фазы на более мелкие, отличающиеся упорядоченностью расположения магнитных токов и их интенсивностью. Обоснована регулярность подобного рассмотрения, а также следствия, подтверждающие наличие второго фазового перехода в модели. Продемонстрирована зависимость корреляционных свойств магнитных токов от направления. Предложен новый способ анализа фазовых переходов при помощи геометрического построения, наглядно раскрывающий изменения, происходящие с токами в различных состояниях.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, топологические дефекты, фазовые переходы

DOI: 10.1134/S2079562920040132

1. ВВЕДЕНИЕ

Предметом рассмотрения данной работы является четырехмерная модель с калибровочной $U(1)$ симметрией — компактная электродинамика на решетке. Требование компактности модели приводит к возникновению топологических дефектов (монополей), создающих магнитные токи [1]. Эти токи могут быть вычислены по распределению линковых переменных и представляют собой дискретное векторное поле в четырехмерном евклидовом пространстве-времени. Анализ изменения свойств данного поля и составляет содержание данной работы. Вычисления, проведенные ранее [2–4], продемонстрировали наличие фазового БКТ-перехода, связанного с генерацией топологичеких объектов. Их наличие приводит к явлению, аналогичному конфайнменту в теории сильных взаимодействий. Более того, было показано, что конфайнмент может пропадать в некоторой области значений параметров модели. Это открывает путь к управляемому подавлению числа возникающих монополей. В данной работе исследуется случай усиления генерации монополей, развивается метод вычисления корреляционных функций магнитных токов и расширяется область наблюдения параметров модели. Это позволяет провести детальный анализ изменения свойств магнитных токов, главным образом, их упорядоченности в четырехмерном пространстве.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДЕЛИ

В статье рассматривается четырехмерная гиперкубическая решетка с размером ребра L и периодическими граничными условиями. L принимает значения $10, 20$ в приводимых вычислениях. Стандартное определение модели дополнено монопольным слагаемым в соответствии с [5]. Действие S модели имеет вид

$$S = -\beta\sum_{p}\mathrm{Re}u_p + \lambda\sum_{x,\mu}\left|M_{x,\mu}\right|, \tag{1}$$

$$u_p = u_{x,\mu}u_{x+\mu,\nu}u^*_{x+\nu,\mu}u^*_{x,\nu}, \tag{2}$$

$$\theta_p^{\mathrm{phys}} = \theta_p + 2\pi n_p, \tag{3}$$

$$M_{x,\mu} = \sum_{\nu}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left(n_{x+\nu,\lambda\rho} - n_{x,\lambda\rho}\right), \tag{4}$$

где p перечисляет плакеты u_p (каждый обходится в положительном направлении), x есть 4-вектор, указывающий вершины решетки, $\mu = \overline{0,3}$ – индекс направления, и $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ есть символ Леви-Чивиты ($\varepsilon_{0123} = 1$). Каждому линку приписано унимодулярное комплексное число, параметризуемое углом $\theta_{x,\mu}$ из диапазона $[-\pi;\pi)$. Линки смежных вершин, ориентированные в противоположных направлениях, связаны друг с другом комплексным сопряжением: $u_{x,-\mu} = u^*_{x-\mu,\mu}$. В результате произведение четырех линков в плакете описывается суммарным углом: $u_p = \exp\{i\theta_p\}$. Требование компактности модели выражается дополнительным условием $\theta_p^{\text{phys}} \in [-\pi;\pi)$, что приводит к необходимости рассмотрения плакетной дефектности $n_p \equiv n_{x,\mu\nu}$. Эта процедура подробно обсуждается в [5]. Дефектности, в свою очередь, позволяют рассчитать магнитные токи $M_{x,\mu}$ (см. (4)), которые рассматриваются в качестве основных объектов в данной статье.

Традиционно выбирают $\lambda > 0$, что позволяет подавить возникновение топологических дефектов [6]. В противоположность этому, мы рассматриваем способы поддержать генерацию монополей. Это будет происходить в области отрицательных λ, что следует из рассмотрения e^{-S}, так как $\lambda < 0$ увеличивает статистический вес конфигураций с монополями.

3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

Самое известное численное обсуждение фазового перехода в калибровочной $U(1)$ модели содержится в [1], где использовано $\lambda = 0$. В нашем случае наличие второго слагаемого в действии существенно. Рассмотрим петлю Вильсона площади $A = T \cdot R$

$$W(T,R) = \\ = u_{x,\mu}u_{x+\mu,\mu}\ldots u_{x+T\mu,\nu}\ldots u_{x+T\mu+R\nu,-\mu}\ldots u_{x+R\nu,-\nu}\ldots u_{x+\nu,-\nu}. \quad (5)$$

Можно показать, что в пределе $\beta \to 0$ асимптотическое поведение W имеет вид

$$W(T,R) = \beta^A + \ldots = ae^{-V(R)T} = ae^{-\sigma(\beta,\lambda)R\cdot T} \sim e^{-\sigma A}, \quad (6)$$

где σ называется натяжением струны, что находит аналогию в свете конфайнмента в теории сильных взаимодействий. Фазовый переход состоит в том, что зависимость петли Вильсона W от ограниченной ими площади переходит в зависимость от периметра петли. В этот момент σ обращается в нуль, что служит тестом для определения критической точки β_{cr}. Результаты вычислений показывают, что β_{cr} является функцией λ.

Для визуализации топологического фазового перехода и его изменения с λ было использовано среднее значение модуля магнитного тока $\langle|M_{x,\mu}|\rangle$ (см. рис. 1). Данная величина оказалась хорошим параметром порядка для идентификации границы между двумя фазами: касательная к графику стремится к вертикальной прямой в окрестности критической точки. Из этих данных можно получить зависимость $\beta_{\text{cr}} = \beta_{\text{cr}}(\lambda)$. Причина зависимости объясняется следующим образом: при увеличении вероятности возникновения монополей ускоряется рождение монопольных пар, что расширяет область их существования. Заметим, что характер изменения модуля среднего тока совпадает с приведенным в [6] изменением средней плотности монополей.

4. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА

В работе получена зависимость величины магнитного тока (4) от параметров модели λ и β. Вся совокупность данных может быть проанализирована различными способами, каждый из которых выявляет, как полагают авторы, сложную картинусвойств модели.

Для подробного анализа определим коррелятор токов как функцию расстояния d:

$$C(d) = \left\langle \frac{1}{4}\sum_{\nu} M_{x,\mu}M_{x+d\nu,\mu} \right\rangle_{x,\mu} \equiv \\ \equiv \frac{1}{16}\left\langle \sum_{\nu,\mu} M_{x,\mu}M_{x+d\nu,\mu} \right\rangle_{x}, \quad (7)$$

где множество усреднения указаны нижним индексом. Целью исследования является доказательство осциллирующего поведения коррелятора в зависимости от d. Хорошо известно, что твердые кристаллы характеризуются дальним порядком, который находит отражение в скоррелированности атомов на больших расстояниях. Жидкости, однако, проявляют лишь небольшое число осцилляций корреляционных функций. Наконец, газы совсем не характеризуются подобным свойством. Поэтому корреляторы позволяют судить о наличии порядка в расположении типичных для системы структур.

Рисунок 2 показывает осцилляции коррелятора (7) с расстоянием d при $\beta = 0.2$, что свидетельствует о наличии порядка расположения $M_{x,\mu}$ в модели. Можно видеть, что величина $\lambda \lesssim -0.8$ достаточна для установления “конденсированной” фазы монополей. Корреляторы для $\lambda \lesssim -0.8$, $\beta = 0.2$ близки к нулю. Рис. 1 позволяет точно указать, что это происходит не из-за исчезновения монополей, но из-за их разупорядочивания. Действительно, вертикальная прямая $\beta = 0.2$

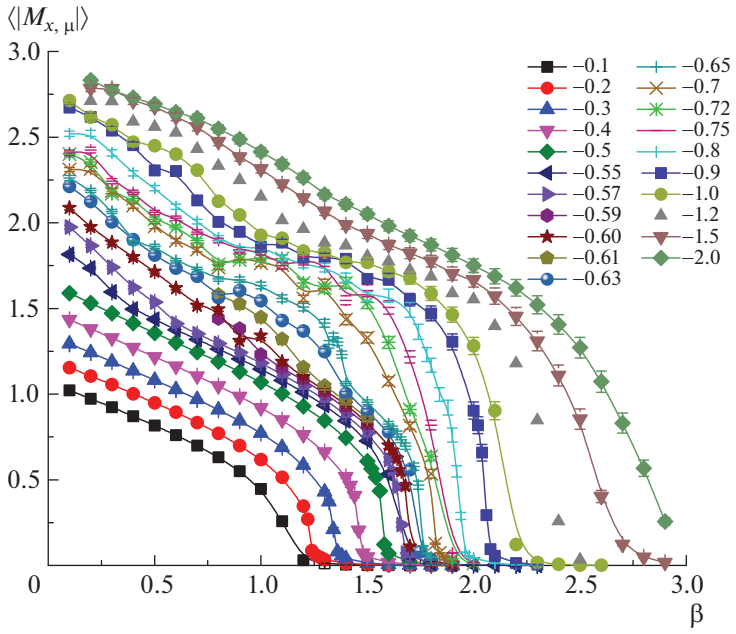

Рис. 1. Среднее значение модуля магнитного тока является хорошей иллюстрацией фазового перехода в калибровочной $U(1)$ модели. График демонстрирует распространенность монополей в зависимости от β (ось абсцисс) и λ (различные кривые).

не соответствует нулевому значению $|M_{x,\mu}|$ ни при каких $\lambda < 0$. Модель находится в фазе конфайнмента, отделенной БКТ-переходом.

В зависимости от конкретных значений параметров λ и β модели уменьшение значений корелятора с расстоянием d происходит с разной скоростью. В данной работе эта быстрота характеризуется отношением величины уменьшения коррелятора через два шага решетки к его исходной величине $\gamma = (C(3) - C(1))/C(1)$, выраженным в процентах. Таким образом, поскольку кристаллические тела характеризуются дальним порядком, значение γ для них будет близко к нулю. Напротив, в жидкой фазе спад коррелятора уже заметен, и величина γ будет принимать "средние" значения. В газовой фазе γ особенно велико (100% и больше). Результаты, отраженные на рис. 3, наглядно демонстрируют наличие всех трех случаев в рассматриваемой модели. При этом значение $\lambda \sim -0.7$ характеризует фазовый переход по конденсации монополей из разупорядоченной фазы, а в области $-1.4 \lesssim \lambda \lesssim -0.9$ происходит медленное "плавление" кристалла. На рисунке представлены сечения постоянной β. Если интерпретировать β как обратную температуру, то полученный результат имеет хорошую аналогию: явление последовательного перехода газ-кристалл-жидкость имеет место и для изотермы воды при изменении давления для температуры ниже тройной точки.

В данной работе выдвигается предположение, что величина (7) оказывается полезной для различия двух фаз упорядочивания монополей: конденсата и газа. Вообще говоря, жидкость и кристалл монополей можно рассматривать как два состояния одной фазы *монопольного конденсата*,

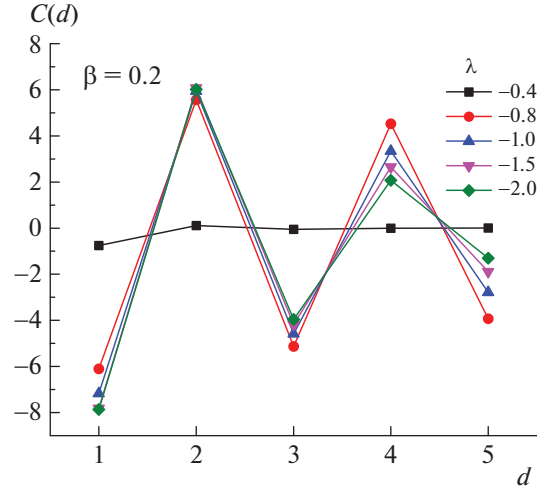

Рис. 2. Коррелятор токов (7) в зависимости от расстояния d при $\beta = 0.2$ показывает существование упорядоченных структур, состоящих из $M_{x,\mu}$. Этот критерий может различать разные состояния модели. Кривые при $\lambda = -0.4$ и $\lambda = -0.8$ принадлежат разным фазам, например.

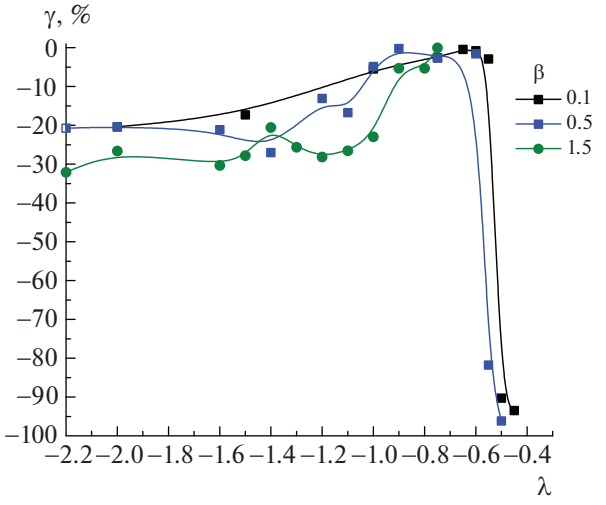

Рис. 3. Наклон падения коррелятора токов (7) с d как функция λ для четырех значений β. Три участка характерных значений (в диапазонах $\lambda \lesssim -1.2$, $-1.2 \lesssim \lambda \lesssim -0.8$ и $\lambda \gtrsim -0.8$) указывают на три состояния модели: жидкость, кристалл и газ. Подробное обсуждение в основном тексте.

поскольку переход между ними происходит крайне медленно и, скорее всего, является кроссовером.

Для изучения формирования монополями упорядоченных структур коррелятор (7) рассматривается как функция параметров β и $\lambda < 0$ при фиксированном расстоянии $d = 1$. Получаемая *фазовая диаграмма* (рис. 4) различает четыре области различных состояний. Во-первых, черными точками нанесен переход конфайнмент-деконфайнмент, ассоциированный с рождением монополей согласно зависимости $\beta_{cr} = \beta_{cr}(\lambda)$. Данный эффект известен [7]. Новым является наблюдение, что если $|\lambda|$ достаточно мало, чтобы связывать монополи вместе, то наблюдается состояние газа: отсутствуют какие-либо корреляции магнитных токов. При увеличении $|\lambda|$ начинается формирование связанных структур с различным средним корреляционным радиусом (область конденсата). Дополнительное появление монополей при больших значениях $|\lambda|$ (это обеспечивается взаимодействием двух слагаемых в действии (1)) приводят к появлению удвоенных магнитных токов, $M_{x,\mu} = \pm 4$ вместо ± 2. Проведенный анализ свидетельствует в пользу предположения, что массовое появление ± 4 разрушает кристалл. Области существования интенсивных токов (левая нижняя область рис. 4) и шахматно упорядоченных токов (кристалл на врезке рис. 4) близки, но не перекрываются.

Заметим, что граница области существования кристалла подходит к точке, образованной смыканием линий БКТ-перехода и фазового перехода по конденсации. Следовательно, точка ($\lambda \simeq -0.75$; $\beta \simeq 2.0$) является тройной точкой.

5. КОРРЕЛЯЦИЯ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ

Рассмотрим обобщение скалярного коррелятора (7): тензорный коррелятор, зависящий от двух индексов. Принимая $d = 1$, получим

$$C_{\mu_1\mu_2} = \left\langle \frac{1}{4} \sum_{\nu} M_{x,\mu_1} M_{x+\nu,\mu_2} \right\rangle_x . \qquad (8)$$

Легко видеть, что

$$C(d=1) = \frac{1}{4} \sum_{\mu} C_{\mu\mu} \equiv \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\mathbf{C}.$$

Рассмотрение (8) позволяет проверить, существует ли связь токов в различных направлениях. Это связано анизотропией кристалла токов, поскольку свойства идеального кристалла от направления не зависят.

В результате расчета был получен набор матриц $C_{\mu_1\mu_2}$ при всех рассмотренных областях значений λ и β. Оказалось, что все получающиеся матрицы имеют вид, допускающий разложение по базису четырех матриц. Следует заметить, что эти матрицы образуют множество, замкнутое относительно умножения. Фазовая диаграмма для определителя тензорного коррелятора обладает существенной особенностью: определитель отличен от нуля в фазе конденсата, а его величина возрастает на два порядка при движении от $\lambda = -1.2$ к $\lambda = -2.0$. Данный вопрос требует дальнейшего изучения.

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

В работе предлагается новый подход к анализу распределенных структур типа магнитных токов. Компьютерная обработка позволяет составить из токов $M_{x,\mu}$, трактуемых как вектора в 4D пространстве, связные объекты, имеющие вид деревьев. При этом правила объединения векторов можно задавать по-разному, получая разные определения деревьев. Полученные таким образом объекты характеризуются геометрическими свойствами: объем, длина “веток”, количество их изгибов, плотность изгибов на единицу длины, линейный размер обрамляющего гиперпараллелепипеда и другие. Было показано, что все эти свойства значительно зависят от фазы, а фазовый переход может быть идентифицирован как скачки в изменении перечисленных свойств. Достоинствами данного подхода являются возможность графического представления распределения токов, универсальность анализа путем построения гистограмм распределений по свойствам и возможность объяснения направления изменения этих свойств.

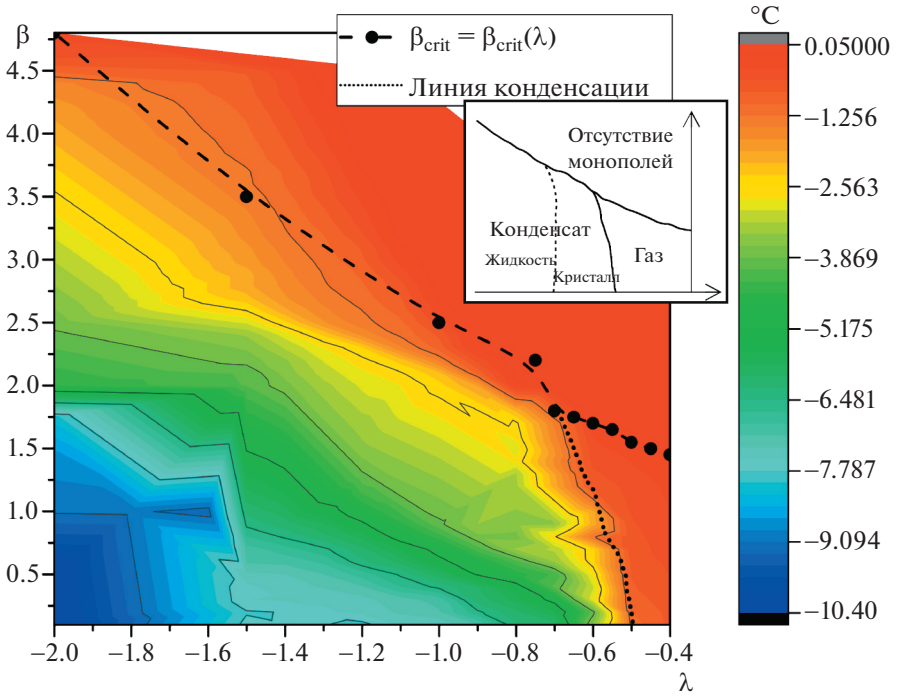

Рис. 4. Фазовая диаграмма показывает значения (7) при $d = 1$ для широкой области λ и β. Черная штриховая кривая отображает зависимость $\beta_{cr} = \beta_{cr}(\lambda)$. Темная область в левом нижним углу показывает преобладание удвоенных токов, а сплошной однородный цвет в правом верхнем углу и справа от прерывистой линии – области разупорядочивания монополей или их отсутствия. Врезка, полученная путем разностороннего анализа данных, помогает идентифицировать фазы калибровочной $U(1)$ модели: отсутствие монополей, газ монополей, жидкость и кристалл.

Детальный анализ тенденций изменения формы и вида геометрических структур позволил сформулировать предположение о выгодности формирования наиболее плотного кристалла токов $M_{x,\mu} = \pm 2$, ориентированных в антиферромагнитном порядке. Этот же результат подтверждается обнаружением области наиболее плотного кристалла при малых β.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы изменения корреляционных свойств магнитных токов в компактной решеточной электродинамике в зависимости от параметров λ и β модели. Получены фазовые диаграммы для широкого диапазона параметров. Подробный анализ доказываетналичие четырех фаз в данной модели, вместо прежде известных двух, что является новым результатом данной работы. Одновременно показано, что предлагаемый авторами магнитный коррелятор токов (7) является параметром порядка для определения фазового перехода по λ – между фазами сконденсированных монополей и газом монополей, упоминания о котором авторам также не известны.

Вычисление тензорного коррелятора (8) позволил выделить область наиболее правильного в пространственном отношении кристалла, а также визуализировать внутреннюю структуру токов, формирующих решетку, подобную антиферромагнетику.

Существенно новый результат, не встречающийся в известных авторам работах: на основе магнитных токов построена коллекция математических объектов двух типов — нитей и деревьев, которые выявляют разнообразные отличительные свойства, объясняющие конденсацию монополей и свидетельствующие об образовании кристалла магнитных токов. Результатом данного подхода является доказательство тенденции к упорядоченности магнитных токов и получение формы наиболее плотного кристалла токов. Более того, сам подход позволяетколичественно оценивать концентрацию и пространственное распределение монополей.

Полученные результаты могут представлять интерес для физики конденсированного состояния, теории поля и эффективной теории сильного взаимодействия.

8. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (номер 19-2-6-227-1). Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова [8]. Работа О.В.П. по анализу фазовой диаграммы компактной КЭД, поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 16-12-10059).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. *DeGrand T.A., Toussaint D.* // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 2478.
2. *Kerler W., Rebbi C., Weber A.* // Nucl. Phys. B. 1995. V. 450. P. 452.
3. *Azcoiti V., di Carlo G., Grillo A.F.* // Phys. Lett. B. 1991. V. 268(1). P. 101.
4. *Bhanot G., Lippert Th., Schilling K., Ueberholz P.* // Nucl. Phys. B. 1992. V. 378(3). P. 633.
5. *Kerler W., Rebbi C., Weber A.* // Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 6984.
6. *Barber J.S., Shrock R.E.* // Nucl. Phys. B. 1985. V. 257. P. 515.
7. *Wilson K.G.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445.
8. *Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В.* // Открытые системы. СУБД. 2012. № 7. С. 36–39.

Crystals of topological vortices in compact electrodynamics

S. D. Mostovoy[1, *] and O. V. Pavlovsky[1, 2, **]

[1] Lomonosov Moscow State University, Leninskiye Gory 1-3, Moscow, 119991 Russia

[2] Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics, National Research Center "Kurchatov Institute," Moscow, 117218 Russia

**e-mail: sd.mostovoy@physics.msu.ru*

***e-mail: ovp@goa.bog.msu.ru*

Received May 8, 2020; revised August 5, 2020; accepted August 5, 2020

We study the changes in the topological properties of four-dimensional compact lattice electrodynamics. The requirement of the model to be compact leads to the appearance of topological defects (monopoles) creating magnetic currents. Available calculations have demonstrated the presence of a phase transition for the production of monopoles. In this work a phase transition between various states inside this phase and indications of the possibility of separating a single "monopoly" phase into smaller ones, which differ in the ordering of the arrangement of magnetic currents and their intensity, are found. The regularity of such a consideration is justified, as well as the consequences confirming the presence of a second phase transition in the model. The dependence of the correlation properties of magnetic currents on the direction is demonstrated. A new method of phase transitions analysis using geometric construction is proposed, revealing the changes that occur with flows in various states.

Keywords: Monte Carlo method, topological defects, phase transitions