

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАЗМЫ, ПУЧКОВ ЧАСТИЦ И ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

УДК 539.122, 539.126.3, 539.124, 539.124.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АКСИАЛЬНОЙ АНОМАЛИИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ НЕПЕРТУРБАТИВНЫХ ЯВЛЕНИЙ в КХД

© 2026 г. С. П. Хлебцов^{a, *}, А. Г. Оганесян^{a, b, **}

^aНациональный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, 123182 Россия

^bЛаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., 141980 Россия

*E-mail: khlebtsov@itep.ru

**E-mail: armen@itep.ru

Поступила в редакцию 16.07.2025 г.

После доработки 16.07.2025 г.

Принята к публикации 25.07.2025 г.

В рамках дисперсионного подхода к аксиальной аномалии рассмотрены как Абелевы, так и не-Абелевы случаи. Были выведены аномальные правила сумм для изовекторного, октетного и синглетного токов, которые позволяют связать экспериментально наблюдаемые величины переходные форм-факторы $\pi^0, \eta, \eta' \rightarrow \gamma\gamma^{(*)}$ с непертурбативным глюонным матричным элементом $\langle 0 | GG | \gamma\gamma^{(*)} \rangle$. Получено описание этого матричного элемента, как функции от виртуальности фотона, в различных кинематических областях.

Ключевые слова: аксиальная аномалия, переходный форм-фактор, псевдоскалярные мезоны, аномальные правила сумм, глюонная аномалия, ФВЭ-феноменология, ФВЭ-теория

DOI: 10.56304/S2079562925060120

Аксиальная аномалия в КХД заключается в не сохранении аксиального тока [1–4]. В частности, синглетный ток $J_{\mu 5}^{(0)} = (1/\sqrt{3}) \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma_5 \psi_i$ содержит как электромагнитную (ЭМ), так и глюонную (не-Абелеву) аномалии. Изовекторная ($a = 3$) и октетная ($a = 8$) компоненты октета аксиальных токов $J_{\mu 5}^{(3,8)} = (1/\sqrt{2}) \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^{(3,8)} \psi_i$ содержат только ЭМ аномалию (число ароматов $i = u, d, s, \lambda^{3,8}$ $SU(3)$ матрицы Гелл–Манна):

$$\partial^\mu J_{\mu 5}^{(0)} = \frac{2i}{\sqrt{3}} \sum_i m_i \bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i + \frac{e^2}{8\pi^2} C^{(0)} N_c FF + \frac{\sqrt{3}\alpha_s}{4\pi} GG, \quad (1)$$

$$\partial^\mu J_{\mu 5}^{(3,8)} = \frac{2i}{\sqrt{2}} \sum_i m_i \bar{\psi}_i \gamma_5 \lambda^{(3,8)} \psi_i + \frac{e^2}{8\pi^2} C^{(3,8)} N_c FF, \quad (2)$$

где F и G электромагнитный и сильный тензоры напряженности, соответственно, $F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ и $G^{\mu\nu, \prime} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma}^{\prime}$, $N_c = 3$ число цветов, α_s константа связи сильного взаимодействия, $C^{(a)}$ рядовые множители (e_i заряды кварков в едини-

$$\text{цах заряда электрона } e): C^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_u^2 - e_d^2) = \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$$C^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_u^2 + e_d^2 - 2e_s^2) = \frac{1}{3\sqrt{6}}, \quad C^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_u^2 + e_d^2 + e_s^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Аксиальная аномалия в дисперсионном подходе впервые была рассмотрена Долговым и Захаровым [5]. Вычисление матричного элемента от оператора (1), связанного с фотон-мезонными переходами, приводит к треугольной диаграмме, состоящей из аксиального тока J_{a5} с импульсом $p = k + q$ и двух векторных токов с импульсами k и q .

$$T_{\alpha\mu\nu}(k, q) = \int d^4x d^4y e^{(ikx+iqy)} \times \langle 0 | T \{ J_{a5}(0) J_\mu(x) J_\nu(y) \} | 0 \rangle. \quad (3)$$

Эту амплитуду можно представить в виде [6]:

$$T_{\alpha\mu\nu}(k, q) = F_1 \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} k^\rho + F_2 \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} q^\rho + F_3 k_\nu \epsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma + F_4 q_\nu \epsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma + F_5 k_\mu \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma + F_6 q_\mu \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma, \quad (4)$$

где $F_j = F_j(p^2, k^2, q^2; m^2)$, $j = 1, \dots, 6$ соответствующие Лоренц-инвариантные амплитуды, ограниченные сохранением тока и Бозэ симметрией. В

работах [7–9] было показано, что для мнимых частей F_3 и F_6 по 4-импульсу аксиального тока p^2 можно записать аномальные правила сумм

$$\frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} A_3^{(a)}(s, Q^2; m^2) ds = \frac{1}{2\pi^2} N_c C^{(a)}, \quad a = 3, 8, \quad (5)$$

где $A_3^{(a)} = \frac{1}{2} \text{Im}_{p^2}(F_3 - F_6)$ функция спектральной плотности и m масса кварка. $Q^2 = -q^2 \geq 0$, где $q^2 < 0$ – это виртуальность пространственно-подобного фотона. Это соотношение верно для произвольной массы кварка m и для любого Q^2 в рассматриваемой области. Подчеркнем, что (5) является точным теоретико-полевым соотношением КХД и представляет собой запись аксиальной аномалии в интегральной форме.

Сочетая теоретико-полевое выражение (5) с глобальной кварк-адронной дуальностью [10] получаем

$$\int_0^{\infty} A_3^{(a)}(s, Q^2) ds = \pi \sum_P f_P^{(a)} F_{P\gamma}(Q^2) + \int_{s_a}^{\infty} A_3^{(a)}(s, Q^2) ds, \quad (6)$$

где первый член в правой части (6) соответствует вкладу наинизших резонансов $P = \pi^0, \eta, \eta'$, а последний член равен сумме всех оставшихся (резонансных и не резонансных) состояний и выражается через такой же интеграл, но с не нулевым нижним пределом s_a , который строго говоря является свободным параметром этого подхода. Проекция аксиальных токов $J_{5\alpha}^{(a)}$ на одно-мезонные состояния $P = \pi^0, \eta, \eta'$ определяют константы связи (распада) f_P^a

$$\langle 0 | J_{55}^{(a)}(0) | P(p) \rangle = i p_a f_P^a(p^2), \quad (7)$$

в то время как форм-факторы $F_{P\gamma}$ переходов $\gamma\gamma^* \rightarrow P$ определяются матричными элементами

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ikx} \langle P(p) | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | 0 \rangle = \\ = e^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma F_{P\gamma}(p^2, Q^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение для спектральной плотности $A_3^{(3,8)}(s, Q^2; m^2)$ в пределе $m_q = 0 (q = u, d, s)$ имеет вид [8]:

$$A_3^{(3,8)}(s, Q^2) = \frac{e_q^2}{2\pi} \frac{Q^2}{(Q^2 + s)^2}. \quad (9)$$

Подставив (9) в (6), из (5) получим АПС для изовекторного ($a = 3$) и октетного ($a = 8$) токов [10–13], для случаев когда один фотон реаль-

ный ($k^2 = 0$), а другой реальный или виртуальный ($Q^2 = -q^2 \geq 0$)

$$\Sigma f_P^{(3,8)} F_{P\gamma}(Q^2) = \frac{C^{(3,8)} N_c}{2\pi^2} \frac{s_{3,8}}{s_{3,8} + Q^2}. \quad (10)$$

Подчеркнем, что выражения (10) являются прямым следствием аксиальной аномалии и глобальной кварк-адронной дуальности. Нижние пределы интегрирования в (6), а также в (10), $-s_{3,8}$ являются свободными параметрами, которые вообще говоря могут быть функциями от Q^2 . Их значения могут быть найдены из сравнения с экспериментом или из сравнения с другими теоретическими подходами.

В случае изовекторного тока ограничиваясь вкладом только π^0 мезона, и пренебрегая $\pi^0 - \eta - \eta'$ смешиванием можно определить величину s_3 непосредственно из асимптотики АПС при высоких Q^2 , где факторизация КХД предсказывает значение переходного форм-фактора при $Q^2 \rightarrow \infty$ $Q^2 F_{\pi\gamma}^{as} = \sqrt{2} f_\pi$ [14]. Сравнение этого выражения с асимптотикой (10) для случая π^0 мезона немедленно приводит к $s_3 = 4\pi^2 f_\pi^2 = 0.67 \text{ ГэВ}^2$. Это выражение, подставленное в (10) дает

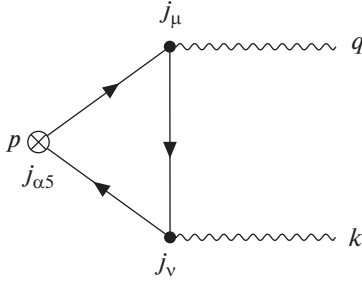
$$F_{\pi\gamma}(Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 f_\pi} \frac{4\pi^2 f_\pi^2}{4\pi^2 f_\pi^2 + Q^2}, \quad (11)$$

что фактически является теоретическим подтверждением из аксиальной аномалии интерполяционной формулы Бродского–Лепаж для ПФФ пиона [15]. Выражение (11) совпадает с результатом полученным Радюшкиным и Русковым [16] в подходе правил сумм на световом конусе. Еще раз подчеркнем, что формула (11) есть прямое следствие АПС для изовекторного тока (являющимся точным непертурбативным соотношением КХД).

В работе [17] по сравнению подходов правил сумм на световом конусе и АПС в пространственно-подобной области, было показано, что значение s_3 слабо меняется от Q^2 от 0.61 до 0.67 ГэВ^2 .

В случае же октетного тока, чтобы оценить величину s_8 из асимптотики, требуется привлечение моделей для описания $\eta - \eta'$ смешивания. В то же время, как отмечено в [19] на основании $SU(3)$ симметрии можно положить $s_8 = s_3 = 0.6 \text{ ГэВ}^2$.

Случай синглетного тока рассмотрен в работах [18, 19], в отличии от изовекторного и октетного токов здесь присутствует $\left\langle 0 \left| \frac{\sqrt{3}\alpha_s}{4\pi} GG \right| \gamma\gamma \right\rangle = N(p^2, q^2) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu q_\nu \epsilon_\rho^{(k)} \epsilon_\sigma^{(q)}$. Его дисперсионное

Рис. 1. A_{QED} .

представление требует вычитания $N(p^2, q^2) = N(0, q^2) + p^2 R(p^2, q^2)$. АПС для синглетного тока имеют вид [18, 19]:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_3^{(0)}(s, Q^2) ds = \frac{C^{(0)} N_c}{2\pi^2} + N(0, q^2) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} R(s, q^2) ds, \quad (12)$$

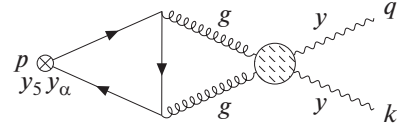
где спектральная плотность определена как $A_3^{(0)} \equiv \frac{1}{2} \text{Im}_p (F_3 - F_6)$. Применяя глобальную кварк-адронную дуальность (6) в левой части (12), получим

$$\begin{aligned} \Sigma f_P^{(0)} F_{P\gamma}(Q^2) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} A_3^{(0)} ds = \\ = \frac{C^{(0)} N_c}{2\pi^2} + N(0, Q^2) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} R(s, Q^2) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Случай синглетного тока отличается от изовекторного и октетного наличием диаграмм нового типа, включающие виртуальные глюоны. Чтобы выделить электромагнитный вклад, разделим спектральную плотность синглетного тока на две части,

$$A_3^{(0)} = A_{QED}^{(0)} + A_{QCD}^{(0)}. \quad (14)$$

Вторая часть $A_{QCD}^{(0)}$ это вклад диаграмм рис. 2 с виртуальными глюонами переходящими в два фотона через всевозможные пертурбативные и непертурбативные сильные взаимодействия [18, 19]. Первая часть $A_{QED}^{(0)}$ представляет вклад КЭД диаграмм, чья наинизшая одна-петлевая часть рис. 1 определяется схожим с (9) выражением с соответствующей заменой зарядового множителя $C^{(0)}$. Используя (9) перепишем АПС (13) в виде

Рис. 2. A_{QCD} .

$$\begin{aligned} \Sigma f_P^{(0)} F_{P\gamma}(Q^2) = \frac{N_c C^{(0)}}{2\pi^2} \frac{s_0}{s_0 + Q^2} - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} A_{QCD} ds + N(0, Q^2) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} R(s, Q^2) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Нижний предел $s_0(q^2)$ в интеграле в правой части (15) должен лежать между квадратом массы последнего учтенного резонанса и первого резонанса включенного в интегральный член. Для синглетного тока, выделяя η и η' мезоны в выражении (15), мы ожидаем $s_0 \geq 1 \text{ ГэВ}^2$, следовательно интеграл от A_{QCD} будет подавлен как α_s^2 . Введем функцию

$$B(Q^2, s_0) = \frac{2\pi^2}{N_c C^{(0)}} \frac{s_0 + Q^2}{s_0} [N(0, Q^2) + B_1(Q^2, s_0)], \quad (16)$$

$$B_0(Q^2) \equiv N(Q^2, 0),$$

$$B_1(Q^2, s_0) \equiv -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} R(s, Q^2) ds - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} A_{QCD}(s, Q^2) ds. \quad (17)$$

Функция $B(Q^2, s_0)$ представляет собой отношение вкладов глюонной и ЭМ аномалии $\left(\frac{\langle 0 | GG | \gamma \gamma^{(*)} \rangle}{\langle 0 | FF | \gamma \gamma^{(*)} \rangle} \right)$. B_0 в (17) это вычитательный член в дисперсионном представлении глюонной аномалии. Член B_1 состоит из двух частей: спектрального представления глюонной аномалии и интеграла от A_{QCD} покрывающего высшие резонансы, который подавлен как α_s^2 при $s_0 \geq 1.0 \text{ ГэВ}^2$. Следовательно, B_1 по сути отражает спектральную часть глюонной аномалии. Поэтому поведение функции $B(Q^2, s_0)$ в основном определяется первыми двумя членами, и она отражает свойства непертурбативного матричного элемента $\langle 0 | GG | \gamma \gamma^{(*)} \rangle$. Тогда АПС для синглетного тока имеют вид [18, 19]:

$$\Sigma f_P^{(0)} F_{P\gamma}(Q^2) = \frac{N_c C^{(0)}}{2\pi^2} \frac{s_0}{s_0 + Q^2} [1 + B(Q^2, s_0)]. \quad (18)$$

Решая систему уравнений для АПС для изовекторного, октетного (10) и синглетного (18) токов, получим выражения для ПФФ

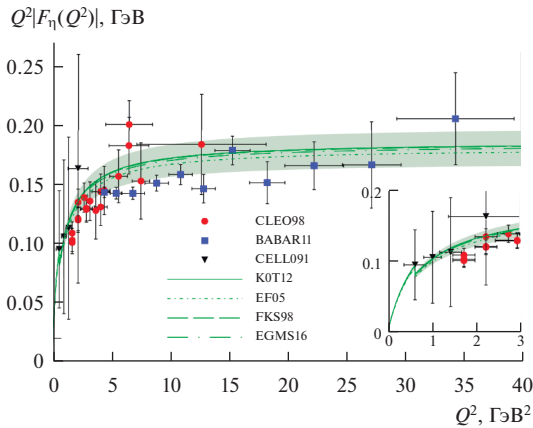


Рис. 3. ПФФ $\pi \rightarrow \gamma\gamma^*$ (19) в пространственноподобной области для различных схем смешивания с аппроксимацией $B(Q^2)$ в виде ступенчатой функции. Зеленая затемненная область показывает 20% неопределенность по s_8 (для схемы смешивания EFGS16 [27]). На вставке показана область низких Q^2 .

$$F_P(Q^2) = \alpha_P \frac{s_3}{s_3 + Q^2} + \beta_P \frac{s_8}{s_8 + Q^2} + \gamma_P \frac{s_0}{s_0 + Q^2} [1 + B(Q^2)], \quad (19)$$

где $P = \pi^0, \eta, \eta'$, коэффициенты $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P$ выражаются через константы распада $f_P^{(i)}$ (7) (численные значения констант распада $f_P^{(i)}$ и коэффициентов $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P$ приведены в [19]).

Данное выражение (19) связывает экспериментально наблюдаемые величины — ПФФ $\pi^0, \eta, \eta' \rightarrow \gamma^*(\gamma) \gamma$ с функцией $B(Q^2, s_0)$, которая соответствует непертурбативному матричному элементу $\langle 0 | GG | \gamma^*(\gamma) \rangle$. Таким образом, изучение функции $B(Q^2, s_0)$ позволяет нам получить вклад не Абелевой аномалии в процессы $\pi^0, \eta, \eta' \rightarrow \gamma^*(\gamma) \gamma$ при различных виртуальностях фотона.

Стоит отметить, что выражения (10), (13), (19) имеют вид схожий с моделью векторной мезонной доминантности (ВМД). Все они есть следствия дисперсионного подхода и глобальной кварк-адронной дуальности полученные без привлечения ВМД.

Как показано в работах [19, 20] необходимо учитывать смешивание $\pi^0 - \eta - \eta'$, что означает что ПФФ пион должен обязательно иметь три члена.

Случай двух реальных фотонов ($k^2 = Q^2 = 0$) был рассмотрен в [18]. Было сделано обобщение низкоэнергетической теоремы (НЭТ) [4] с учетом

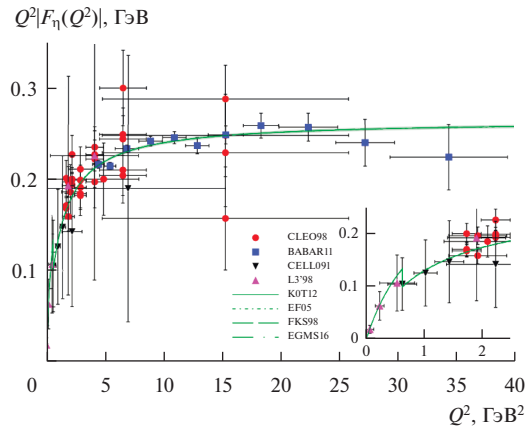


Рис. 4. ПФФ $\eta' \rightarrow \gamma\gamma^*$ (19) в пространственноподобной области для различных схем смешивания с аппроксимацией $B(Q^2)$ в виде ступенчатой функции. На вставке показана область низких Q^2 .

$\pi^0 - \eta - \eta'$ смешивания, и получено значение вычитательной константы глюонной аномалии

$$N(0,0,0) = B_0 = \frac{N_c}{2\pi^2 f_\eta^8} (f_\eta^0 C^{(8)} - f_\eta^8 C^{(0)}). \quad (20)$$

Используя АПС для октетного (10) и синглетного (18) токов и НЭТ, получаем

$$F_\eta(0) = \frac{N_c C^{(8)}}{2\pi^2 f_\eta^8} - \frac{B_1 f_\eta^8}{\Delta},$$

$$F_{\eta'}(0) = \frac{B_1 f_\eta^8}{\Delta}, \quad \Delta = f_\eta^8 f_{\eta'}^0 - f_\eta^0 f_{\eta'}^8.$$

Таким образом, было установлено, что спектральная часть глюонной аномалии B_1 прямо пропорциональна амплитуде распада $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$. Существование распада η' мезона на два реальных фотона указывает на то, что у глюонной аномалии должна быть ненулевая мнимая часть, имеющая нетривиальную зависимость от импульсов фотонов ($p_\mu = (k + q)_\mu$). Что в свою очередь исключает вариант константы для вклада сильной аномалии, в противоположность случаю электромагнитной аномалии.

Численное значение функции $B(0)$ можно вычислить из АПС (18) через данные ширины распадов, полученные результаты приведены в табл. 1.

Случай с одним реальным и другим виртуальным фотоном был рассмотрен в работе [19]. Для пространственно-подобных виртуальностей ($Q^2 = -q^2 > 0$) установлено, что $B(s_0, Q^2)$ быстро выходит на постоянное значение $B \approx -0.25$ и ее поведение можно описать ступенчатой-функцией.

Таблица 1. Вклад глюонной аномалии в случае двух реальных фотонов для различных схем смешивания

Схема смешивания	$B(0)$
FKS98 [21]	0.022
EF05 [22]	0.045
KOT12 [12]	-0.080
EGMS16 [27]	-0.024

ей, а именно — $B \approx 0$ при $Q^2 = [0-0.6] \text{ ГэВ}^2$ и $B \approx -0.25$ начиная с $Q^2 \geq 0.6 \text{ ГэВ}^2$.

Также в [19] исследовалась зависимость функции $B(s_0, Q^2)$ от s_0 . Используя экспериментальные данные по ПФФ η и η' мезонов [23–26], было сделано фиттирование, положив s_0 и B в качестве параметров. Установлено, что во всех рассмотренных схемах смешивания s_0 оказывается равным 1 ГэВ^2 , полученные значения s_0 и B , а также соответствующие $\chi^2_{\eta+\eta'}/dof$ приведены в табл. 2.

Контурный график $\chi^2_{\eta+\eta'}/dof$ для схемы смешивания EGMS16 [27] показан на рис. 5. Черные круглая и квадратные точки показывают минимумы χ^2 для фитов по объединенным $\eta + \eta'$ и отдельно η' данным соответственно.

На рис. 5 видна корреляция между B и s_0 . А именно, хотя наилучшие полученные значения в результате фита $s_0 \approx 1 \text{ ГэВ}^2$ и $B \approx -0.25$, также возможен вариант с $B \approx 0$, требующий $s_0 \approx s_3 \approx 0.6 \text{ ГэВ}^2$, что означает пренебрежение сильной аномалией при больших Q^2 , а не только при $Q^2 = 0$. Мы будем называть этот сценарий ($s_0 \approx 0.6 \text{ ГэВ}^2$ и $B(Q^2) \approx 0$) случаем *скрытой сильной аномалии*, в противоположность случаю *открытой сильной аномалии* ($s_0 \approx 1 \text{ ГэВ}^2$ и $B(Q^2) \approx -0.25$).

Вопрос об аналитическом продолжении для ПФФ (19) во времени-подобную область рассмотрен в [19], для этого необходимо заменить Q^2

на $-q^2$ в (19). Установлено, что эти режимы соответствуют разным кинематическим областям.

Результаты для области Далицовских распадов ($4m_l^2 \leq q^2 < m_p^2$) η и η' мезонов показаны на рис. 7 и 8, сценарии со скрытой и открытой аномалией показаны сплошными красными и штрихованными зелеными кривыми соответственно. Затемненная область отражает 20% теоретическую неопределенность (вносимую s_8). Как видно из рис. 7 и 8, данные в рассматриваемой области малых q^2 подтверждают случай скрытой аномалии. Отметим, что свежие данные 2024 г. для η' [33] также подтверждают случай скрытой аномалии.

Область аннигиляции ($q^2 > m_p^2$) также была рассмотрена в работе [19]. Показано, что реализуется случай открытой аномалии. Установлено, что функция $B(q^2, s_0)$ должна иметь экстремум при $q^2 \approx 1 \text{ ГэВ}^2$, который можно параметризовать с помощью Гауссиана.

Обнаруженный Гауссово-подобный минимум $B(q^2)$ может означать вклад резонанса в глюонном матричном элементе,

$$\int_0^\infty \text{Im} R(s, Q^2) ds = \sum_X \langle 0 | GG | X \rangle \langle X | \gamma \gamma^* \rangle.$$

Из того факта, что минимум расположен при $q^2 \approx 1 \text{ ГэВ}^2$, можно предположить, что он представлен псевдоскалярным резонансом(-ами) с массами $1 - 1.3 \text{ ГэВ}$, поэтому энергия виртуального фотона в финальном состоянии может быть $\sim 1 \text{ ГэВ}$. Легкий глюбол является возможным кандидатом. Также возможно, что этот минимум это результат суммы нескольких резонансов [19] (и ссылки там же).

Результат для ПФФ η мезона показан на рис. 6. В области высоких энергий $q^2 = 112 \text{ ГэВ}^2$ [37] также реализуется сценарии открытой аномалии. Отметим, что значения s_0 и $B(q^2, s_0)$ такие же как

Таблица 2. Полученные значения s_0 и B для различных схем смешивания, в скобках приведена статистическая ошибка

Сх. смешивания	s_0	B	$B - B(0)$	$\frac{\chi^2_{\eta+\eta'}}{dof = 81 - 2}$
FKS98 [21]	1.00(10)	-0.242(62)	-0.264	1.66
EF05 [22]	0.99(10)	-0.209(66)	-0.254	1.20
KOT12 [12]	1.01(10)	-0.320(56)	-0.240	1.74
EGMS16 [27]	1.00(10)	-0.272(60)	-0.248	1.51

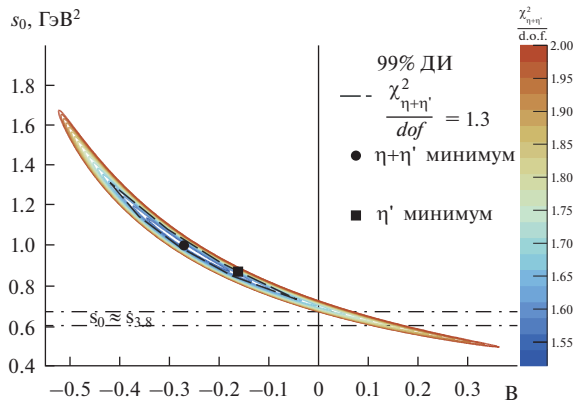


Рис. 5. Контурный график $\chi^2_{\eta+\eta'}/dof$ для η, η' ПФФ по данным [23–26] с использованием схемы смешивания EGMS16 [27]. Черные штрихованный контур и круглая точка обозначают линию 99% ДИ и минимум, соответственно, для объединенных данных по $\eta + \eta'$; черная квадратная точка обозначает минимум χ^2 для η' данных.

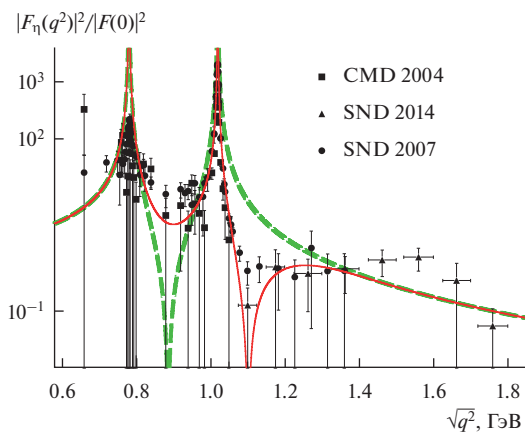


Рис. 6. ПФФ η (19) в области аннигиляции [34–36]: красная сплошная кривая – ПФФ с $B(q^2, s_0)$ с Гауссианом, зеленая штриховая кривая – ПФФ со ступенчатой-функцией $B(q^2, s_0)$

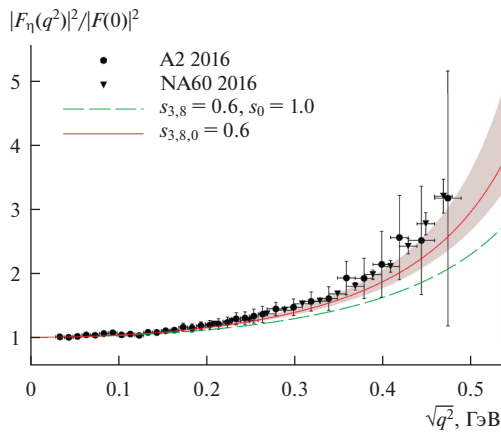


Рис. 7. ПФФ η (19) при различных s_0 для Далицовских распадов [30, 31].

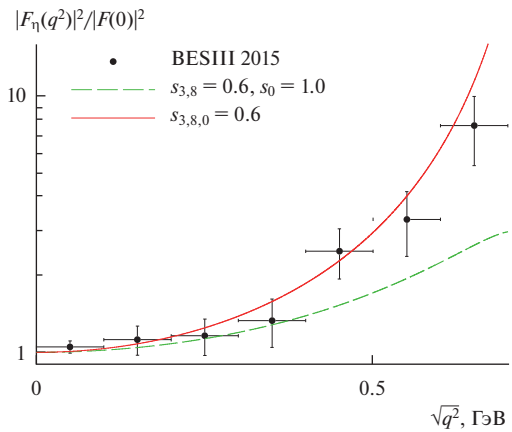


Рис. 8. ПФФ η' (19) при различных s_0 для Далицовских распадов [32].

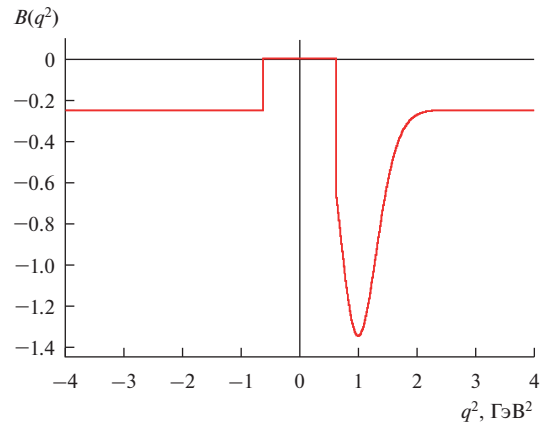


Рис. 9. Функция отношения глюонной к ЭМ аномалии – $B(q^2, s_0)$.

и в пространственно-подобной области, и таким образом асимптотики совпадают.

Таким образом, мы можем заключить, что в области малых $|q^2|$ реализуется сценарий скрытой сильной аномалии ($B = 0$ и $s_0 \approx s_{8,3}$). Начиная с $|q^2| \gtrsim 0.6$ ГэВ² имеет место сценарий открытой аномалии ($B = -0.25$, $s_0 = 1$ ГэВ²), вклад сильной аномалии в ПФФ быстро становится значительным и достигает 25% от вклада электромагнитной аномалии. Во времени-подобной области при $q^2 = 1$ ГэВ² функция $B(q^2, s_0)$ должна иметь минимум. График функции $B(q^2, s_0)$ изображен на рис. 9. Строго говоря, функция $B(q^2, s_0)$ должна быть непрерывной, поэтому рис. 9 может считаться первой грубой аппроксимацией, но тем не

менее отражающей все характерные аспекты поведения функции $B(q^2, s_0)$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ “Курчатовский институт”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. Adler S.L. // Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 2426.
2. Bell J.S., Jackiw R. // Nuovo Cim. 1969. A. V. 60. P. 47.
3. Morozov A.Yu. // Sov. Phys. Usp. 1986. V. 29. P. 993–1039.
4. Shifman M.A. // Phys. Rep. 1991. V. 209 (6). P. 341–378.
5. Dolgov A.D., Zakharov V.I. // Nucl. Phys. B. 1971. V. 27. P. 525.
6. Rosenberg L. // Phys. Rev. 1963. V. 129. P. 2786.
7. Horejsi J. // Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 1029.
8. Horejsi J., Teryaev O. // Z. Phys. C. 1995. V. 65. P. 691.
9. Veretin O.L., Teryaev O. // Phys. At. Nucl. 1995. V. 58. P. 2150.
10. Klopot Y.N., Oganessian A.G., Teryaev O.V. // Phys. Lett. B. 2011. V. 695. P. 130.
11. Melikhov D., Stech B. // Phys. Lett. B. 2012. V. 718. P. 488.
12. Klopot Y.N., Oganessian A.G., Teryaev O.V. // Phys. Rev. D. 2013. V. 87 (3). P. 036013. Erratum: Phys. Rev. D. 2013. 88 (5). P. 059902.
13. Klopot Y.N., Oganessian A.G., Teryaev O.V. // JETP Lett. 2014. V. 99. P. 679.
14. Lepage G.P., Brodsky S.J. // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 2157.
15. Lepage G.P., Brodsky S.J. // Phys. Rev. D. 1981. V. 24. P. 1808.
16. Radyushkin A.V., Ruskov R.T. // Nucl. Phys. B. 1996. V. 481. P. 625–680.
17. Oganessian A.G., Pimikov A.V., Stefanis N.G., Teryaev O.V. // Phys. Rev. D. 2016. V. 93 (5). P. 054040.
18. Khlebtsov S., Klopot Y., Oganessian A., Teryaev O. // Phys. Rev. D. 2019. V. 99 (1). P. 016008.
19. Khlebtsov S., Klopot Y., Oganessian A., Teryaev O. // Phys. Rev. D. 2021. V. 104 (1). P. 016011.
20. Khlebtsov S., Oganessian A., Teryaev A. // JETP Lett. 2016. V. 104 (3). P. 145–151.
21. Feldmann T., Kroll P., Stech B. // Phys. Rev. D. 1998. V. 58. 114006.
22. Escrivano R., Frere J.M. // J. High Energy Phys. 2005. V. 0506. P. 029.
23. Acciarri M. et al. (L3 Collab.) // Phys. Lett. B. 1998. V. 418. P. 399–410.
24. Behrend H.J. et al. (CELLO Collab.) // Z. Phys. C. 1991. V. 49 (3). P. 401.
25. Gronberg J. et al. (CLEO Collab.) // Phys. Rev. D. 1998. № 57. P. 33.
26. del Amo Sanchez P. et al. (BaBar Collab.) // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. P. 052001.
27. Escrivano R., González-Solís S., Masjuan P., Sanchez-Puertas P. // Phys. Rev. D. 2016. V. 94 (5). P. 054033.
28. Masjuan P. // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. 094021.
29. Escrivano R., Masjuan P., Sanchez-Puertas P. // Eur. Phys. J. C. 2015. V. 75 (9). P. 414.
30. Adlarson P. et al. (A2 Collab.) // Phys. Rev. C. 2017. V. 95. 035208.
31. Arnaldi R. et al. (NA60 Collab.) // Phys. Lett. B. 2016. V. 757. P. 437–444.
32. Ablikim M. et al. (BESIII Collab.) // Phys. Rev. D. 2015. V. 92. 012001.
33. Ablikim M. et al. (BESIII Collab.) // Phys. Rev. D. 2024. V. 109 (7). P. 7.
34. Akhmetshin R.R. et al. (CMD2 Collab.) // Phys. Lett. B. 2005. V. 605 (1–2). P. 26.
35. Achasov M.N. et al. (SND Collab.) // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 077101.
36. Achasov M.N. et al. (SND Collab.) // Phys. Rev. D. 2014. V. 90. P. 032002.
37. Aubert B. et al. (BABAR Collab.) // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P. 012002.

Using the Axial Anomaly to Study Non-Perturbative Phenomena in QCD

S. P. Khlebtsov^{1, *} and A. G. Oganessian^{1, 2, **}

¹National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, 123182 Russia

²Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Russia

*e-mail: khlebtsov@itep.ru

**e-mail: armen@itep.ru

Received July 16, 2025; revised July 16, 2025; accepted July 25, 2025

Abstract—In the framework of the dispersion approach to the axial anomaly, both Abelian and non-Abelian cases are considered. Anomalous sum rules for isovector, octet and singlet currents are derived, which allow us to relate the experimentally observed quantities, the transition form factors $\pi^0, \eta, \eta' \rightarrow \gamma\gamma^{(*)}$, with the non-perturbative gluon matrix element $\langle 0 | GG | \gamma\gamma^{(*)} \rangle$. A description of this matrix element is obtained as a function of the photon virtuality in various kinematic regions.

Keywords: axial anomaly, transition form-factor, pseudoscalar mesons, anomaly sum rules, gluon anomaly, HEP-phenomenology, HEP-theory