

ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С ПОТЕНЦИАЛОМ В УСЛОВИЯХ ПОДВИЖНОСТИ ЕГО ГРАНИЦ

© 2026 г. Е. Е. Барминова^{a, b, *}, И. М. Костышина^a

^aРоссийский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва, 117198 Россия

^bНациональный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409 Россия

*E-mail: eebarmnova@mephi.ru

Поступила в редакцию 16.05.2025 г.

После доработки 16.05.2025 г.

Принята к публикации 26.05.2025 г.

Для задач создания table-top ускорителей заряженных частиц и ионных ловушек различных модификаций исследованы квантово-механические аспекты взаимодействия частицы с потенциалом, имеющим подвижные границы. Рассмотрен случай постоянной скорости расширения областей положительного и отрицательного потенциалов. На примере одномерной системы показано, что поведение волны де Бройля частицы определяется соотношением величины потенциала и скорости расширения его границ. Приведены результаты вычислений в MATLAB.

Ключевые слова: ускорение заряженных частиц, ионная ловушка, потенциальный барьер, потенциальная яма, волна де Бройля, уравнение Шредингера

DOI: 10.56304/S2079562925060028

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в фундаментальных и прикладных исследованиях в области физики ускорителей и физики плазмы повышенный интерес проявляется к созданию компактных ускорителей на кильватерных волнах (DLA, PWFA, LWFA и их комбинаций), а также ионным ловушкам (в том числе EBIT). Теоретическая проработка принципов и оценка потенциальных возможностей и достижимых параметров, например, по интенсивности и энергии, необходима на этапе проектирования таких устройств. В значительной степени эта задача должна решаться методами квантовой механики, поскольку в подобных устройствах используется принцип взаимодействия частицы с нестационарным в общем случае потенциалом, и в большинстве устройств длина волны де Бройля превышает радиус Дебая. Исследования взаимодействия частиц с локализованным потенциалом ведутся давно, однако, работ, изучающих поведение частицы в области нестационарного поля, не так много, и среди недавних работ можно выделить, например, [1–5]. В работе [1] рассмотрен случай рассеяния волнового пакета на локализованном возмущенном потенциале, и найдены точные решения для класса волновых пакетов в определенном временном диапазоне. В [2] исследовано рассеяние нерелятивистского волнового пакета на одномерном квазигауссовском потенциале (потенциале Эккарта), то есть на потенци-

але единичного иона. В [3, 4] в низко-энергетической асимптотике рассматривались двумерные задачи рассеяния на точечном (кулоновском) потенциале и потенциале вида $V_0 r^{-\beta}$ для случая $\beta \in (1, 2)$. В [5] изучались преимущественно релятивистские эффекты на нестационарных границах, в частности эффект Казимира, который в случае нерелятивистской частицы исчезающе мал. В настоящей работе был рассмотрен случай, при котором частица (электрон либо ион) взаимодействует с достаточно протяженной областью потенциала в плазме, размер которой может быть порядка нескольких радиусов Дебая. Как правило, поле в такой области удобно описывать постоянным потенциалом везде, кроме границ области, однако в первом приближении отличием поля вблизи границ от постоянного можно пренебречь. В представленной работе решалась задача анализа квантовомеханическими методами поведения частицы в пространстве с локализованным прямоугольным равномерно расширяющимся потенциалом и определения в этом приближении условий прохождения барьера и захвата ямой.

2. РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОТЕНЦИАЛЕ С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

Рассмотрим область положительного потенциала, границы которого перемещаются в про-

странстве. Для простоты анализа будем считать, что потенциальный барьер прямоугольный и расширяется с постоянной скоростью, система одномерна.

Уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t),$$

где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — волновая функция системы, зависящая от пространственных координат $\mathbf{r}$ и времени t , $\hat{H}$ — оператор Гамильтона физической системы, $\hbar = h/2\pi$ — постоянная Планка, для случая одномерной системы, содержащей потенциальный барьер с подвижными стенками, будет выглядеть следующим образом:

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = U(x, t) \Psi(x, t). \quad (1)$$

Упростим уравнение (1), положив $\hbar = 1, m = 1$. Представив потенциал $U(x, t)$ в виде

$$U(x, t) = \alpha \theta(x - vt) \theta(x + vt), \quad (2)$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, α — высота барьера, v — скорость расширения барьера, получим:

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \alpha \theta(x - vt) \theta(x + vt) \Psi(x, t). \quad (3)$$

Это уравнение описывает эволюцию волновой функции одномерной физической системы во времени и пространстве в присутствии нестационарного потенциала [6, 7]. Для решения уравнения (3) возьмем волновую функцию в виде волны де Бройля:

$$\Psi(x, t) = A \exp(ipx - iEt) \quad (4)$$

или полностью в импульсном представлении

$$\Psi(x, t) = A \exp\left(ipx - \frac{ip^2 t}{2}\right), \quad (5)$$

где $E = \frac{p^2}{2}$, p — импульс частицы. Очевидно, что в системе следует различать три пространственные области, разделенные стенками барьера: I — $x < -vt$ ($U = 0$), II — $-vt < x < vt$ ($U = \alpha$), III — $x > vt$ ($U = 0$). Каждая из этих областей характеризуется интерференцией падающих, прошедших и отраженных волн, при этом волновые функции в каждой области должны удовлетворять условиям непрерывности функции и ее первой производной по координате на границах, то есть в местах нахождения стенок барьера в данный момент времени. Координаты стенок потенциала $x = -vt$ и $x = vt$. Запишем итоговые выражения для волновых функций в каждой из трех областей:

Для области I:

$$\Psi = \Psi_1 = A_0 \exp\left(ip_0 x - \frac{ip_0^2 t}{2}\right) + A_1 \exp\left(ip_1 x - \frac{ip_1^2 t}{2}\right), \quad (5)$$

где первое слагаемое соответствует падающей волне, второе — отраженной. Коэффициенты перед экспонентами определяют соответствующую амплитуду.

Для области II:

$$\Psi = \Psi_2 = B \exp\left(iqx - \frac{ip_2^2 t}{2} - i\alpha x\right) \quad (6)$$

— волновая функция частицы, находящейся внутри области потенциала.

Для области III:

$$\Psi = \Psi_3 = C_1 \exp\left(ip_3 x - \frac{ip_3^2 t}{2}\right) + C_2 \exp\left(ip_4 x - \frac{ip_4^2 t}{2}\right), \quad (7)$$

где первое слагаемое соответствует прошедшей барьер волне, второе слагаемое соответствует волне, отраженной от границы барьера между областями II и III.

Положительные значения импульсов p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) соответствуют волнам, движущимся в том же направлении, что и начальная волна, отрицательные значения соответствуют волнам, распространяющимся в обратном направлении. При решении системы уравнений, полученной при сшивке волновых функций и их первых производных на первой границе барьера, для импульсов были получены следующие соотношения для импульсов частицы:

$$p_0 = -v + \sqrt{(p_2 + v)^2 - 2\alpha}, \quad (8)$$

$$p_1 = -v - \sqrt{(p_2 + v)^2 - 2\alpha}.$$

Значения p_0 и p_1 реальны, если $p_2 > \sqrt{2\alpha} - v$ или $p_2 < \sqrt{2\alpha} + v$. Так же $p_0 > 0$ если $p_2 > -v + \sqrt{v^2 + 2\alpha}$.

По аналогии на второй границе ($x = vt$) получится:

$$p_3 = v + \sqrt{(p_2 - v)^2 + 2\alpha},$$

$$p_4 = v - \sqrt{(p_2 - v)^2 + 2\alpha}.$$

Здесь $p_4 > 0$ если $p_2 < -v + \sqrt{v^2 - 2\alpha}$.

Следовательно получим

$$p_3 = v + \sqrt{\left(2v - \sqrt{(p_0 + v)^2 - 2\alpha}\right)^2 + 2\alpha},$$

$$p_4 = v - \sqrt{\left(2v - \sqrt{(p_0 + v)^2 - 2\alpha}\right)^2 + 2\alpha}. \quad (9)$$

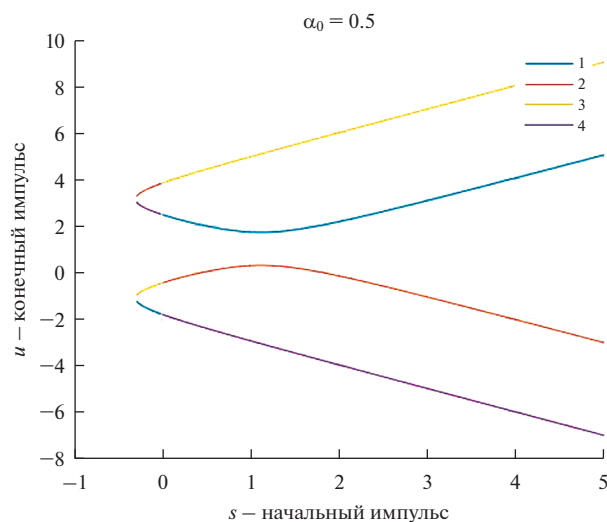


Рис. 1. Зависимость конечных импульсов волны от начальных импульсов при $\alpha_0 = 0.5$.

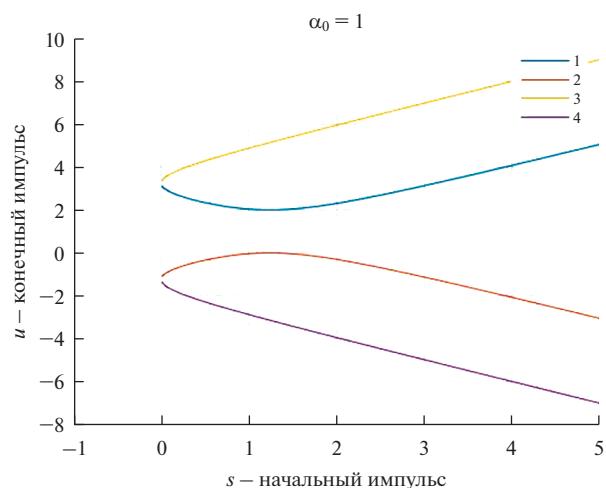


Рис. 2. Зависимость конечных импульсов волны от начальных импульсов при $\alpha_0 = 1.0$.

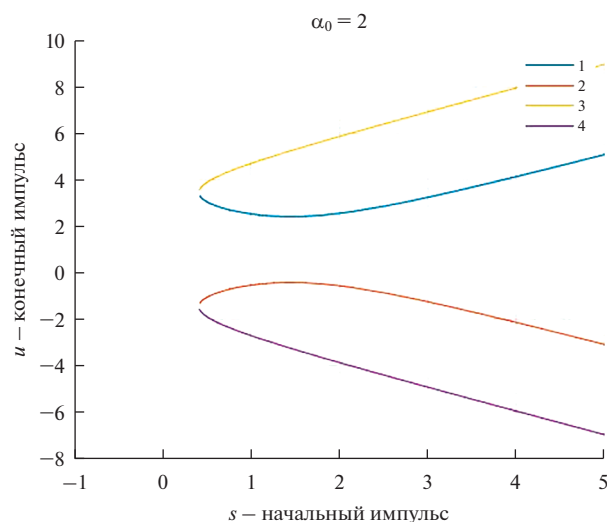


Рис. 3. Зависимость конечных импульсов волны от начальных импульсов при $\alpha_0 = 2.0$.

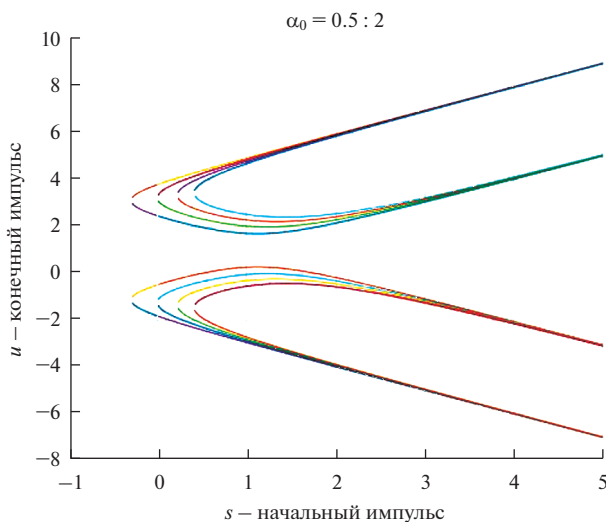


Рис. 4. Зависимость конечных импульсов волны от начальных импульсов при $\alpha_0 = 0.5-2.0$.

Таким образом, получена зависимость конечного импульса от начального. Результаты вычислений, проведенных в среде MATLAB, представлены на рис. 1–4 [6]. Здесь введены обозначения $s = \frac{p_0}{v}$, $u = \frac{p}{v}$, $\alpha_0 = \frac{2\alpha}{v^2}$, которые представляют собой безразмерные величины начального и конечного импульсов волны и потенциала соответственно. Для $\alpha_0 = 0.5-2$ получены зависимости $u(s)$, из которых очевидно, что при величине потенциала $\alpha_0 < 1$ существует диапазон величин начальных импульсов, для которого вероятность отражения волны уменьшается.

Результаты расчетов показывают, что значение $\alpha_0 = 1$ разделяет два режима в поведении падающей на барьер частицы: при скорости расширения барьера такой, что “кинетическая энергия” расширения меньше высоты барьера ($0 < \alpha_0 < 1$), существует диапазон энергий налетающей частицы, при которых вероятность прохождения частицей области потенциала увеличена, и наоборот, при скоростях расширения, для которых высота барьера больше “кинетической энергии” его расширения, в области за барьером с равной вероятностью существуют как прямые, так и отра-

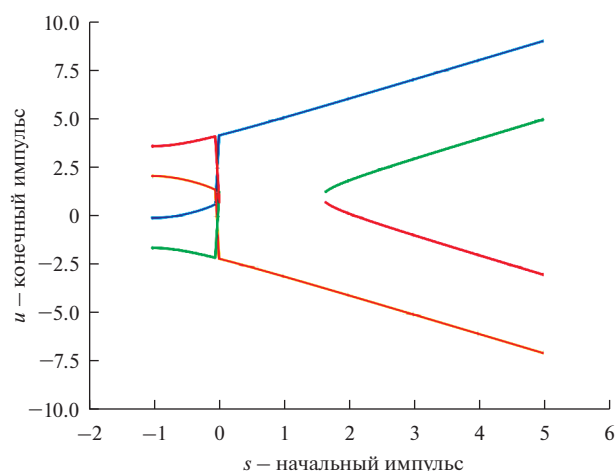


Рис. 5. Зависимость конечных импульсов волны от начальных импульсов при $\alpha_0 = 0.5$.

женные волны. При $\alpha_0 = 0.5$ этот диапазон составляет $\sim(0.01-2)v^2$.

Далее рассмотрим ситуацию, когда в пространстве существует область отрицательного потенциала, то есть частица попадает в пространство с локализованной потенциальной ямой. Поведение волны де Бройля, соответствующей такой частице, исследуем таким же образом, как и в случае положительного потенциала. Выражения для волновых функций как решений нестационарного уравнения Шредингера, выглядят аналогично предыдущему случаю с учетом знака потенциала. Решения уравнений сшивки функций и их первых производных на границах потенциала представлены на рис. 5–7, где показаны зависимости

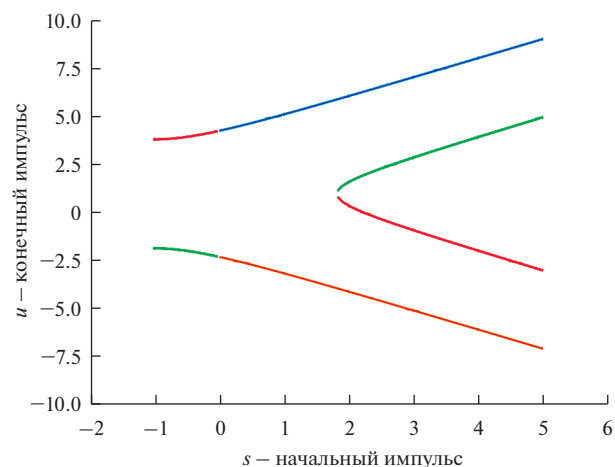


Рис. 6. Зависимость конечных импульсов волны от начальных импульсов при $\alpha_0 = 1.0$.

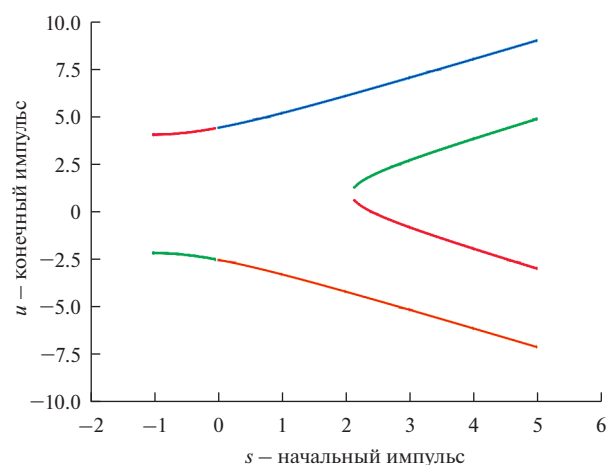


Рис. 7. Зависимость конечных импульсов волны от начальных импульсов при $\alpha_0 = 2.0$.

безразмерных конечных импульсов от безразмерных импульсов падающей волны (начальных импульсов) $u(s)$.

Физический смысл имеют решения для конечных импульсов $s > 0$. Из рисунков очевидно, что для фиксированных параметров системы α_0 и v можно найти область значений начальных импульсов s , при которых частица будет захвачена ямой либо с высокой вероятностью пройдет область, занятую потенциалом. Как и в случае с положительным потенциалом, существует граничное значение для соотношения “кинетической энергии” расширения барьера и его высоты $\alpha_0 = 1$, при котором различаются два режима в поведении падающей частицы. При $\alpha_0 < 1$ вероятность захвата частицы расширяющейся ямой мала, и уменьшается с уменьшением глубины ямы или увеличением скорости ее расширения. Установление диапазона энергий падающей частицы, при которых она будет гарантированно захвачена областью потенциала с фиксированными величиной и скоростью расширения, равно как и физическая интерпретация полученных в работе результатов, требует дальнейшего исследования.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для одномерной физической системы частица-потенциал возможно получение точных аналитических решений нестационарного уравнения Шредингера в приближении равномерного расширения области потенциала с прямыми стенками. Показано, что на поведение частицы и вероятность ее прохождения через потенциальный барьер или захвата потенциальной ямой влияет соотношение величины локального потенциала и

квадрата скорости расширения области, занятой потенциалом в пространстве. Для фиксированной скорости расширения потенциала существует диапазон величин импульсов падающей волны и величин потенциала, при которых возможно прохождение частицей области потенциала без отражения. При фиксированных величинах потенциала ямы и скорости ее расширения возможно определить диапазон импульсов налетающей частицы, при которых она будет захвачена ямой. Результаты, приведенные в настоящей работе, могут быть использованы при разработке компактных ускорителей на кильватерных волнах типа PWFA, LWFA и их гибридных модификаций, а также ионных ловушек различного типа, в частности EBIT.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. *da Costa R.C.T.* // Braz. J. Phys. 2015. V. 45. P. 404–408.
2. *de la Cal X.G., Pons M., Sokolovski D.* // Sci. Rep. 2022. V. 12. P. 3842.
3. *Barton G.* // Amer. J. Phys. 1983. V. 51. P. 420–422.
4. *Pupyshev V.V.* // Theor. Math. Phys. 2020. V. 203. P. 673–690.
5. *Федотов А.М.* Квантовые эффекты, связанные с нестационарностью граничных условий. Дисс. к.ф.-м.н. 2001. Москва: МИФИ.
6. *Костышина И.М., Как Б., Барминова Е.Е.* Сб. науч. труд. XI Междунар. конф. ЛаПлаз-2025. 27–31 января 2025 г. Москва, Россия. 2025. Москва: НИЯУ МИФИ. С. 159.
7. *Barminova H.Y., Chikhachev A.S.* // J. Rus. Laser Res. 2011. V. 32. P. 264–268.

Peculiarities of the Interaction of a Plane Wave with a Potential under Conditions of Mobility of Its Boundaries

H. Y. Barminova^{1, 2, *} and I. M. Kostyshina¹

¹*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN), Moscow, 117198 Russia*

²*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

*e-mail: eebarminova@mephi.ru

Received May 16, 2025; revised May 16, 2025; accepted May 26, 2025

Abstract—for the problems of development of table-top charged particle accelerators and ion traps of various modifications, quantum-mechanical aspects of the interaction of particles with a potential having movable boundaries are studied. The case of a constant expansion rate of positive and negative potential regions is considered. Using a one-dimensional system as an example, it is shown that the behavior of the de Broglie wave of a particle is determined by the ratio of the potential value and the expansion rate of its boundaries. The results of calculations in MATLAB are given.

Keywords: acceleration of charged particles, ion trap, potential barrier, potential well, de Broglie wave, Schrödinger equation