

УДК 539.171.4

## МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ОБРАЗОВАНИЯ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР, ВОЗНИКАЮЩИХ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

© 2025 г. Н. И. Сельченкова<sup>а</sup>, А. Я. Учаев<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>Российский федеральный ядерный центр — ВНИИЭФ, Саров, Нижегородской обл., 607188 Россия

\*E-mail: [uchaev@expd.vniief.ru](mailto:uchaev@expd.vniief.ru)

Поступила в редакцию 15.01.2025 г.

После доработки 15.01.2025 г.

Принята к публикации 22.01.2025 г.

В работе рассмотрены универсальные признаки явления динамического разрушения, диспергирования металлов и развитой турбулентности. Показано, что критическое поведение нелинейных систем различной физической природы связано с явлениями самоорганизации, динамического хаоса и со стохастической неустойчивостью. Этому поведению предшествует возникновение в системах масштабно-инвариантных пространственно-временных диссипативных иерархических структур, возникающих через каскад бифуркаций. Результаты проведенных исследований ряда неравновесных процессов показали, что кинетика возникновения диссипативных структур имеет свойства последовательности событий, временные интервалы между которыми имеют статистически самоподобные распределения. Спектр сингулярностей мультифрактальной меры, описывающий ряд времен ожиданий, является характеристикой рассмотренных нелинейных процессов. С физической точки зрения спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  можно рассматривать как количественную характеристику неравновесных систем, находящихся в процессе бифуркационных переходов.

**Ключевые слова:** критическое поведение нелинейных систем, явления динамического разрушения и диспергирования металлов, развитая турбулентность, диссипативные иерархические структуры, спектр сингулярностей мультифрактальной меры, бифуркационные переходы

DOI: 10.56304/S2079562925060272

### ВВЕДЕНИЕ

Критическое поведение нелинейных систем различной физической природы связано с явлениями самоорганизации, динамического хаоса и со стохастической неустойчивостью. Такие процессы возникают в явлениях динамического разрушения и диспергирования металлов, развитой турбулентности в атмосфере, в жидкостях, при пластических течениях в металлах. Результаты исследований явления динамического разрушения и диспергирования металлов на основе методов неравновесных процессов позволяют рассматривать эти явления как критический переход в эволюции неравновесных систем. Этому переходу предшествует возникновение в системах масштабно-инвариантных пространственно-временных диссипативных иерархических структур, возникающих через каскад бифуркаций. Тем самым эти явления следует интерпретировать, как мультифрактальные процессы. Скейлинговые соотношения позволяют сформулировать прогностические признаки поведения динамических нелинейных систем по мере приближения к критическим точкам [1, 2].

В явлении динамического разрушения конденсированные среды проявляют фундаментальные физические свойства.

В конденсированной среде при наличии макроразрушения происходят нестационарные динамические процессы образования и исчезновения каскада диссипативных структур, распределение которых по размерам подчиняется концентрационному критерию. Исчезновение каскада диссипативных структур является условием существования определенного времени жизни каскада диссипативных структур на различных масштабно-временных уровнях (среда обладает долговечностью). Неограниченный рост каскада диссипативных структур в конденсированной среде приводит к процессу диспергирования.

Необратимость поведения конденсированной среды на атомном уровне при давлении  $P < 0$  вызвано флуктуационным разрывом межатомных связей (квантовым, термофлуктуационным), когда возникают надбарьерные, туннельные переходы; энергия  $E(P)$  меньше энергии связи  $E_{св}$ . Флуктуационные процессы на микроуровне мо-

гут привести к необратимому поведению неравновесной среды; других механизмов для случая  $E(P) < E_{\text{св}}$  не существует. Поведение неравновесной среды на атомном уровне приводит к коллективному (фрактальному) поведению каскада диссипативных структур на наноуровне. Каскад бифуркаций, контролируемый концентрационным критерием, приводит систему к необратимому поведению на макроуровне. Макроскопическое необратимое поведение системы определяется флуктуационной природой необратимости в неравновесной среде на атомном уровне [1, 2].

## ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем ряд примеров универсального поведения неравновесных систем разной физической природы.

В работе [1] на основе расчетно-теоретических исследований и анализа литературных данных показана аналогия явлений динамического разрушения конденсированных сред и развитой турбулентности. Проведен математический мультифрактальный анализ количественных характеристик каскадов диссипативных структур.

В современной литературе показана аналогия между теорией мультифрактальных мер и аппаратом неравновесной термодинамики [3]. Термодинамические параметры позволяют показать, что изменение микросостояния неравновесной системы могут быть описаны скейлинговыми соотношениями для каскадов диссипативных структур, самоподобных физических полей непосредственно связанных с переходом системы к динамическому хаосу, критическому состоянию.

В работе [4] рассмотрены динамические и фрактальные характеристики временных рядов выделения сейсмической энергии, которые обладают самоподобными свойствами. Авторы работы [5] рассмотрели вариации геофизических полей, как проявление детерминированного хаоса во фрактальной среде. Определены спектральные свойства временных рядов для геофизических полей. В работе [6] рассмотрены: масштабная инвариантность коровой сейсмичности и прогностические признаки землетрясений, приведен анализ временного хода сейсмичности. Показано, что эти характеристики обладают самоподобием. Авторы работы [7] рассмотрели автомодельность корреляционных функций полей скоростей в изотропной турбулентности и привели экспериментальные проверки гипотез автомодельности.

Приведем примеры воздействия ударных волн на металлы, в которых отмечается автомодельность диссипативных процессов. В работе [8] показана масштабная инвариантность при фрагментации сферического ударника на тонком металлическом экране. Распределение фрагментов

по массам проявляют свойство масштабной инвариантности. В работе [8] установлены предельные режимы соударения, обеспечивающие сварку металлов взрывом. Явление, возникающее при соударении металлических пластин, т. е. сварка взрывом, имеет непосредственную связь с процессом образования кумулятивной струи.

В работе [9] с применением теории размерности моделируется процесс волнообразования при сварке взрывом; приводится определение длины волны по параметру  $\gamma$  (углу соударения). На рис. 1 приведены полученные разными авторами экспериментальные данные по сварке металлов взрывом при соударении металлических пластин под определенными углами в координатах  $\lambda/\delta_1 - \gamma$  ( $\lambda$  — длина волны контакта сварки,  $\delta_1$  — толщина металлической пластины,  $\gamma$  — угол соударения,  $\lambda/\delta_1 \sim 0.1-3$ ) для металлов с различными физико-механическими свойствами (сталь, свинец) и плотностями (от алюминия до свинца), которые близки к единой кривой [10].

Экспериментальные данные в координатах  $\lambda/\delta_1$  (от 0.1 до 1.5) и  $\gamma$  (от  $5^\circ$  до  $40^\circ$ ) для пластин Ст3—Ст3, Cu—Cu, Al—Al близки к единой кривой, т. е.  $\lambda/\delta_1$  являются функцией безразмерного параметра. На основании приведенных в работе исследований можно сделать предположение, что волнообразование, подобно процессу образования кумулятивных струй, по своей природе является гидродинамическим явлением.

В явлении динамического разрушения конденсированных сред связаны в единый процесс разномасштабные объекты — каскады диссипативных структур — на различных масштабно-временных уровнях, которые характеризуются масштабной инвариантностью (фрактальными свойствами) [11].

Переход неравновесной системы с одного масштабно-временного уровня на другой (процесс укрупнения), подчиняется концентрационному критерию, который имеет масштабно-инвариантную зависимость. Макроразрушение, меняющее связность тела, реализуется, когда возникает связность в системе каскада диссипативных структур — каскада центров разрушения — перколяционный, топологический фазовый переход. Поскольку эти факты отражают один и тот же физический процесс, то очевидно, что они должны дополнять друг друга и создавать целостную феноменологическую картину явления динамического разрушения конденсированных сред.

Из концентрационного критерия следует [2, 11], что существует некое пороговое значение отношения расстояния между центрами разрушения  $r$  к диаметру центра разрушения  $D$ , которое является физической константой

$$C_k \sim r/D \sim 2.7.$$

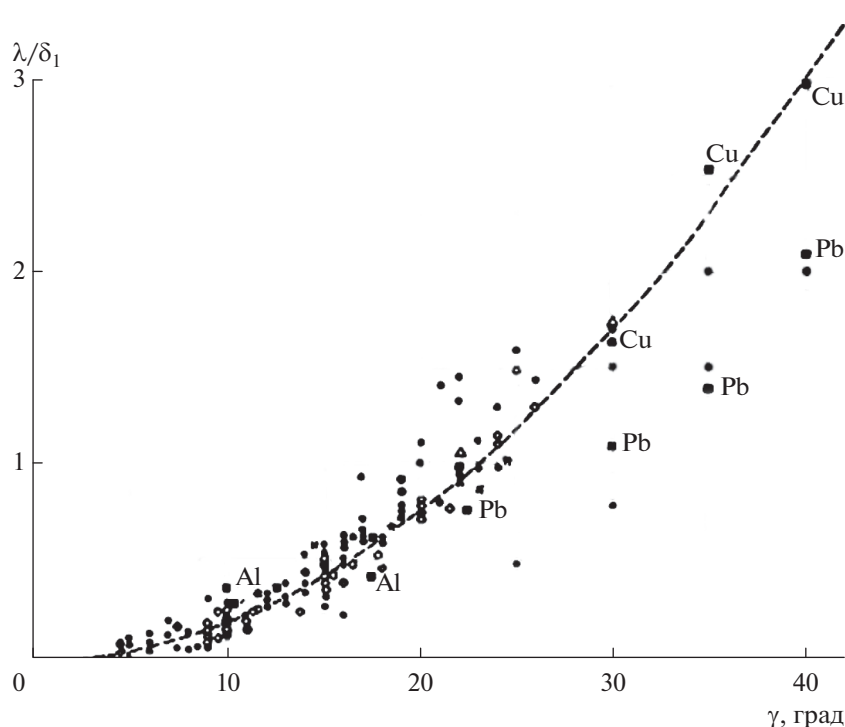


Рис. 1. Зависимость  $\lambda/\delta_1$  от  $\gamma$  при  $\delta_1 \rightarrow \infty$ .

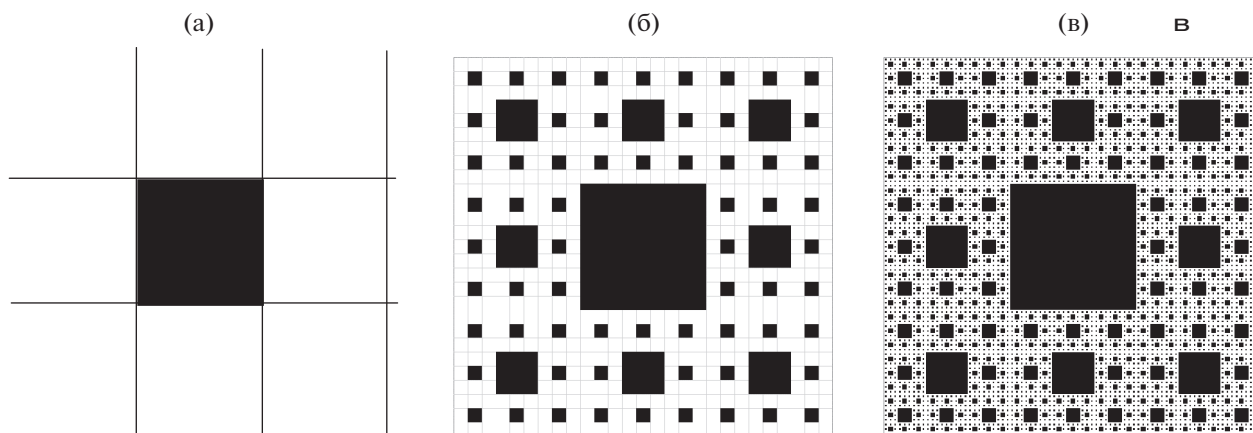


Рис. 2. Построение регулярного ковра Серпинского: (а) итерация первая ( $k = 1$ ); (б) итерация третья ( $k = 3$ ); (в) итерация пятая ( $k = 5$ ) [2].

Покажем, что концентрационный критерий имеет масштабно-инвариантную структуру. Для примера рассмотрим ковер Серпинского [2], вид которого подобен каскаду центров разрушения. Единичный квадрат делится на девять частей, внутренняя часть удаляется. Первая итерация  $k = 1$ ,  $N = 8$ ,  $\eta = 1/3$ ,  $\eta$  – число квадратов, необходимых для покрытия начального единичного квадрата. Фрактальная размерность ковра Серпинского определяется  $d = \ln N(\eta)/\ln(1/\eta)$ .

На рис. 2 приведена последовательность изменения внешнего вида ковра Серпинского для

первой итерации ( $k = 1$ , рис. 2а), третьей итерации ( $k = 3$ , рис. 2б) и для пятой итерации ( $k = 5$ , рис. 2в) [2].

Согласно работам [1, 2], число элементов  $N(D)$  диссипативных структур размером  $D$  есть  $N(D) \sim D^{-d}$ , откуда следует  $D \sim N(D)^{-1/d}$ , или  $d = \ln N(D)/\ln(1/D)$ . Следовательно, фрактальная размерность элементов концентрационного критерия (каскада центров разрушения и каскадов расстояний  $r$  между центрами разрушения) имеет одно значение, поскольку  $r = 2.7D$ .

Несмотря на то, что ковер Серпинского является регулярным фрактальным объектом, статистически гистограммы пустот ковра Серпинского подобны гистограммам распределения элементов каскада диссипативных структур различной природы на различных масштабно-временных уровнях [2].

Таким образом, структура масштабно-инвариантного концентрационного критерия управляет буфуркационными переходами в необратимых нелинейных системах.

Фрактальные размерности диссипативных структур, образующихся в нелинейных системах различной природы, связаны концентрационным критерием с переходом системы с одного масштабно-временного уровня на следующий, т.е. переходом системы через каскад бифуркаций.

Каскады диссипативных структур на различных временах процесса являются фрактальными кластерами, а на заключительной стадии, например, в явлении динамического разрушения каскады центров разрушения являются фрактальными перколяционными кластерами [2].

Число элементов диссипативных структур определенного размера в единичном (элементарном) объеме системы на масштабе времени процесса можно сопоставить с частотой  $f$  появления элементов диссипативных структур. Выражение  $S(f) \sim f^{-\beta}$  называется спектральной мощностью;  $\beta$  — спектральный скейлинговый параметр.

Такой же вид имеет зависимость числа элементов диссипативных структур от их размера  $D(N) \sim N^{-1/d}$  [2].

Обратной величине  $f$  можно сопоставить “время” жизни элементов диссипативных структур. На масштабе времени процесса можно построить временной ряд жизни элементов диссипативных структур, пронумеровав в порядке возрастания времени. Согласно концентрационному критерию [11] масштабно-временные уровни элементов диссипативных структур иерархической неравновесной системы взаимосвязаны.

Для анализа динамики неравновесной системы требуется получение переменных, которые определяют последовательность состояний системы. Если известны уравнения эволюции системы, то определение таких переменных не вызывает проблем. Однако, поведение нелинейных физических систем различной природы связано со стохастической неустойчивостью, явлениями динамического хаоса. В этом случае инвариантные характеристики динамической системы могут быть вычислены с применением временного ряда какого-либо экспериментального наблюдаемого параметра системы. Ряд считается временным, если элементы ряда зависят от времени. Например, распределение числа элементов диссипативных

структур (центров разрушения, гидродинамических мод) зависит от времени.

Временной ряд, элементы которого представляют число событий в единицу времени, не связаны между собой. Следовательно, необходимо определить методы, которые позволили бы сохранить информацию об объекте исследований, о временных событиях и их взаимосвязи. Временной интервал между событиями с индексами  $i$ ,  $i + 1$  определяется величиной

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (1)$$

которые связаны между собой, где  $t_i$  — время  $i$ -го события.

Ряд времен ожиданий можно рассматривать, как временную зависимость кинетики неравновесных процессов различной физической природы и как носитель прямой информации о физических процессах, недоступных для непосредственного наблюдения.

Величины  $\Delta t_i$  аддитивны

$$\sum_{i_{\min}}^{i_{\max}-i_{\min}} \Delta t_i = t_{i_{\max}} - t_{i_{\min}},$$

$i_{\max}$ ,  $i_{\min}$  — значения индекса  $i$  для любого непрерывного ряда;  $i_{\max} - i_{\min}$  число времен ожидания на временном отрезке; величины  $\Delta t_i$  неотрицательны. Выше изложенное делает эти параметры пригодными для скейлингового анализа.

В 80-х годах был разработан новый математический аппарат — теория мультифрактальных мер. Теория мультифрактальных мер была разработана для описания общего случая подобия, возникающего во многих математических задачах и природных объектах (процессах), находящихся в критическом состоянии. Книга Б. Мандельброта “Фрактальная геометрия природы” (1982 г.), можно сказать, стала становлением фрактальной геометрии [12]. В последствии общая теория самоподобия (теория мультифрактальных мер) была развита в работах [13–16].

Приведем краткое содержание теории с определением терминов для описания в дальнейшем временных рядов, характеризующих некоторые неравновесные явления.

Пусть  $M$  область евклидова пространства, в которой определена вероятностная мера  $P$ . Если область  $M$  покрыть квадратными ячейками размера  $r$ , то содержание меры  $P$  в  $i$ -той ячейке  $p_i$ .

Рассмотрим статистическую сумму

$$Z(q, r) = \sum_{i=1}^N p_i^q(q, r),$$

где  $N$  — число ячеек,  $q$  — порядок момента меры. Для самоподобной меры справедлива степенная зависимость статистической суммы от масштаба  $r$  [15].

$$\sum_{i=1}^N p_i^q(q, r) \approx r^{-d}, \quad (2)$$

где  $d$  – фрактальная размерность.

Если соотношение (2) выполняется, то  $d$  является функцией порядка момента меры  $q$ ;  $d = \tau(q)$ . Выражение для показателя массы  $\tau(q)$  имеет вид

$$\tau(q) = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^N p_i^q(q, r)}{\ln r}. \quad (3)$$

Спектр фрактальных размерностей определяется выражением

$$D(q) = (1/(q-1)) \frac{\ln \sum_{i=1}^N p_i^q(q, r)}{\ln r}$$

или учитывая (3),

$$D(q) = (1/(q-1)) \tau(q). \quad (4)$$

Альтернативным способом описания структуры самоподобной меры является вычисление функции  $f(\alpha)$  – спектра сингулярностей мультифрактальной меры,  $\alpha(q)$  – индекс [17]. Спектр обобщенных фрактальных размерностей  $D(q)$  связан со спектром сингулярностей  $f(\alpha)$  преобразованием Лежандра [17]:

$$\alpha(q) = d((q-1)D(q))/dq = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^q(q, r) \ln p_i(q, r)}{\sum_{i=1}^N p_i^q(q, r) \ln r};$$

$$f(\alpha) = \alpha \tau(q) + (1-q) D(q). \quad (5)$$

Необходимо отметить, что функция  $\tau(q)$  не имеет экстремума. Экстремум функции  $f(\alpha)$  совпадает с монофрактальной размерностью множества. Отметим, что предел  $D(q_{\min})$  совпадает с максимальным значением  $\alpha$ , а  $D(q_{\max})$  – с минимальным.

Фрактальный характер распределения диссипативных структур на наноуровне вытекает из неравновесного состояния конденсированной среды [1, 2, 11]. В равновесных системах фрактальных структур не образуется.

Описание меры  $P$  с применением  $D(q)$  и  $f(\alpha)$  математически эквивалентно. Однако, правая часть спектра, соответствующая большим значениям  $\alpha$ , чувствительна к статистическим данным. При малых значениях статистических данных при построении логистической параболы правая часть зависимости может отклоняться от формы параболы.

Спектр мощности любого шума, подчиняющегося однородному степенному закону  $f^{-\beta}$  са-

моподобен [18]. Если масштаб оси частот изменить в  $r$  раз, то масштаб временной оси изменится в  $1/r$  раз. Явления, спектры которых представляют собой однородные степенные функции, не имеют собственных масштабов времени и частоты. Здесь нет таких понятий как характеристическое время или частота: то что происходит в одном временном или частотном интервале происходит при любом масштабировании времени или частоты.

В случае шума и других вероятностных явлений самоподобие носит статистический характер.

## ОБСУЖДЕНИЕ

Покажем это на примере математической обработки временных рядов, возникающих в нелинейных системах различной физической природы.

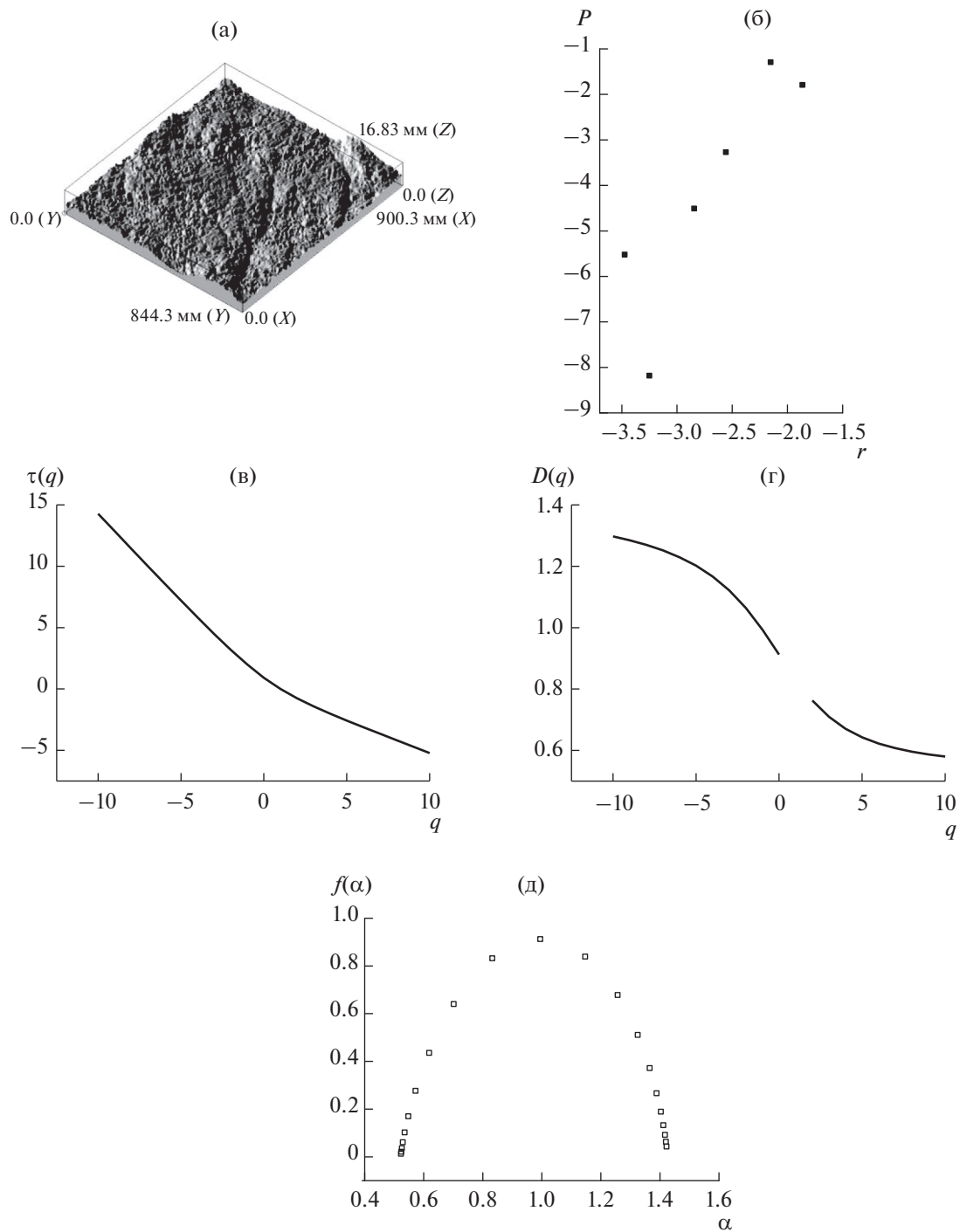
Проведем мультифрактальный анализ массивов данных, которые включают вычисления функций: показателя массы –  $\tau(q)$ , спектра фрактальных размерностей –  $D(q)$ , спектра сингулярностей мультифрактальной меры –  $f(\alpha)$  в зависимости от  $\alpha(q)$ -индекса сингулярностей и  $q$  – порядка момента меры.

С применением математического пакета программ интерактивной системы анализа изображений [11] проводилась обработка изображений внутренних поверхностей центров разрушения. Определялось распределение шероховатостей внутренних поверхностей центров разрушения по размерам. На рис. 3а приведен вид шероховатости внутренней поверхности центра разрушения для медного образца на наномасштабном уровне, после импульсного воздействия лазерного излучения. На рис. 3б приведен спектр времен ожиданий  $t_{ож}$ ; показатель массы  $\tau(q)$  и обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  – рис. 3в, 3г; спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  – рис. 3д.

На рис. 4а приведен шлиф медного образца ( $\Delta \sim 0.5$  мм,  $\times 500$ ) при воздействии релятивистских электронных пучков; спектр времен ожиданий  $t_{ож}$  – рис. 4б; показатель массы  $\tau(q)$  – рис. 4в; обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  – рис. 4г; спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  полос скольжений кристаллической решетки (гидродинамическое перемешивание металлов) на мезо-I масштабном уровне (рис. 4д).

На рис. 5а приведен шлиф железного образца Fe ( $\Delta \sim 0.4$  мм), перпендикулярный поверхности разрушения, после воздействия релятивистских электронных пучков; спектр времен ожиданий  $t_{ож}$  – рис. 5б; показатель массы  $\tau(q)$  – рис. 5в; обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  – рис. 5г; спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  каскада центров разрушения на мезо-II масштабном уровне (рис. 5д).

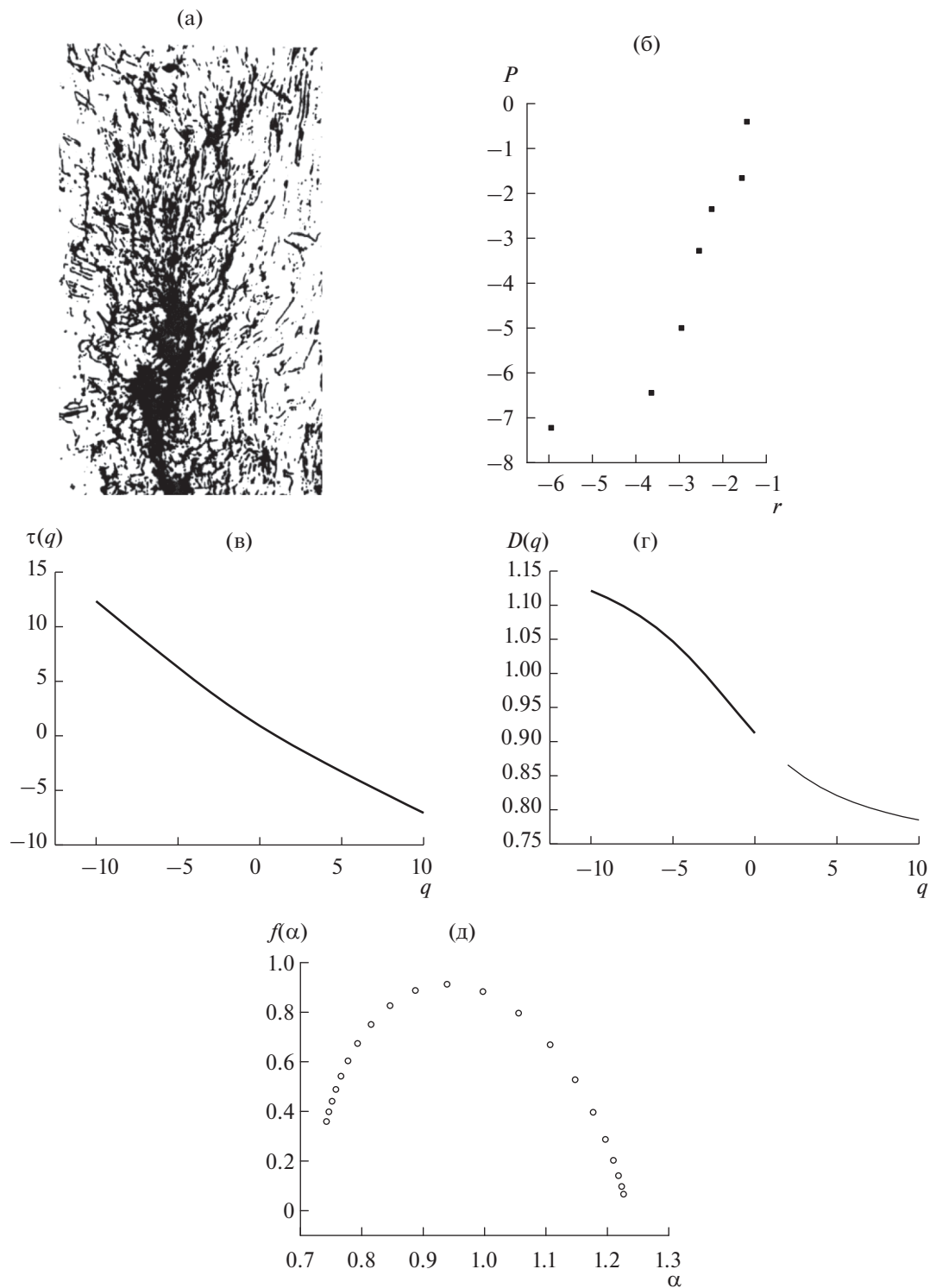
На рис. 6а приведены внешний вид диспергированных частиц из медной пирамидки ( $\alpha \sim 60^\circ$ ) после



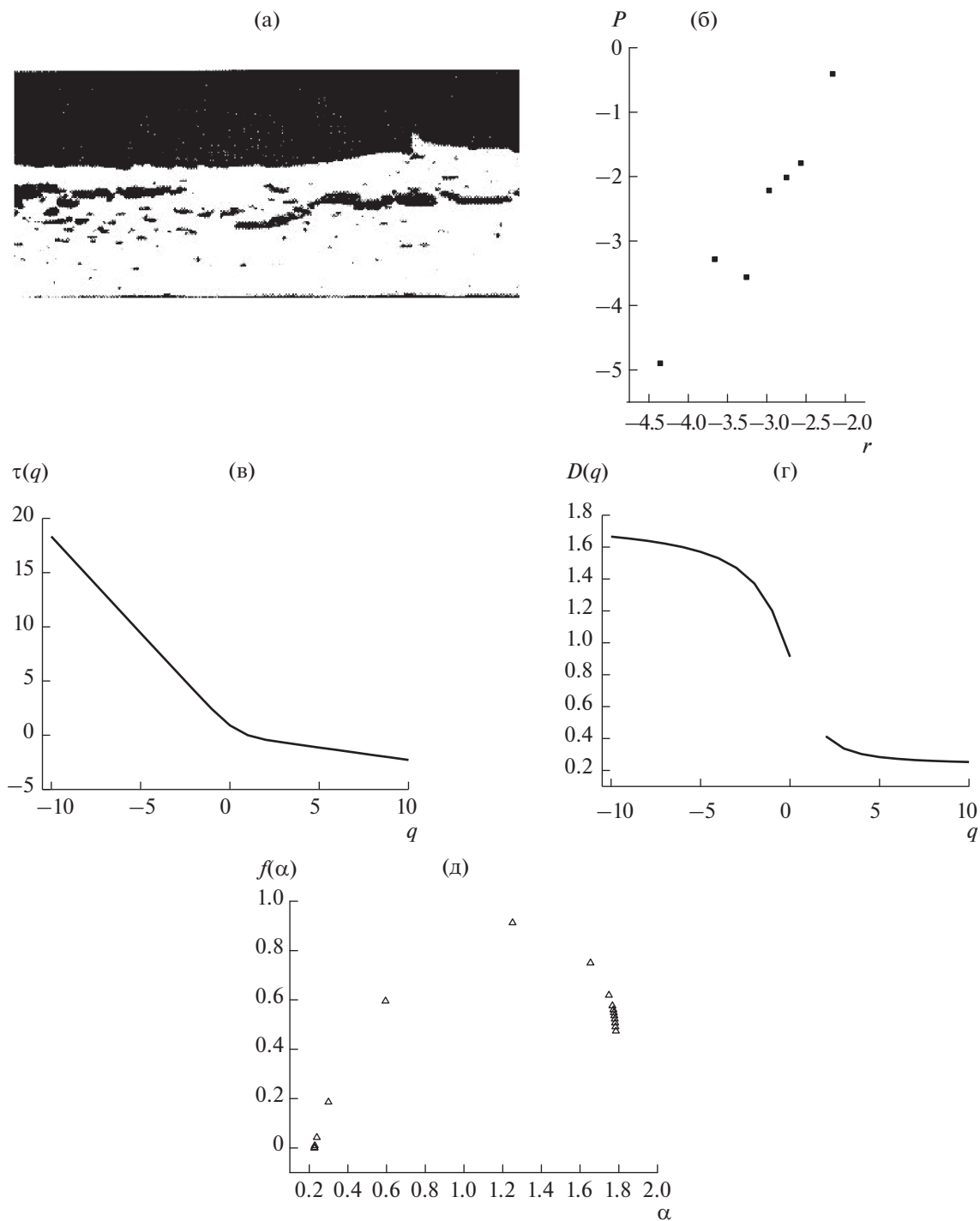
**Рис. 3.** Вид шероховатости внутренней поверхности центра разрушения медного образца на наномасштабном уровне, подвергнутого импульсному воздействию лазерного излучения (а); спектр времен ожиданий  $t_{\text{ож}}$  (б); показатель массы  $\tau(q)$  (в); обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  (г); спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  (д).

воздействия релятивистских электронных пучков; спектр времен ожиданий  $t_{\text{ож}}$  — рис. 6б; показатель массы  $\tau(q)$  — рис. 6в; обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  — рис. 6г; спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  на макромасштабном уровне (рис. 6д).

На рис. 7а приведено изображение гравитационного турбулентного перемешивания двух несжимаемых жидкостей разной плотности, движущихся с постоянным ускорением [19]; спектр времен ожиданий  $t_{\text{ож}}$  — рис. 7б; показатель массы



**Рис. 4.** Шлиф медного образца ( $\Delta \sim 0.5$  мм,  $\times 500$ ) при воздействии релятивистских электронных пучков (а); спектр времен ожиданий  $t_{\text{ож}}$  (б); показатель массы  $\tau(q)$  (в); обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  (г); спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  полос скольжений кристаллической решетки (гидродинамическое перемешивание металлов) на мезо-I масштабном уровне (д).



**Рис. 5.** Шлиф железного образца Fe ( $\Delta \sim 0.4$  мм), перпендикулярный поверхности разрушения, после воздействия релятивистских электронных пучков (а); спектр времен ожиданий  $t_{\text{ож}}$  (б); показатель массы  $\tau(q)$  (в); обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  (г); спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  каскада центров разрушения на мезо-II масштабном уровне (д).

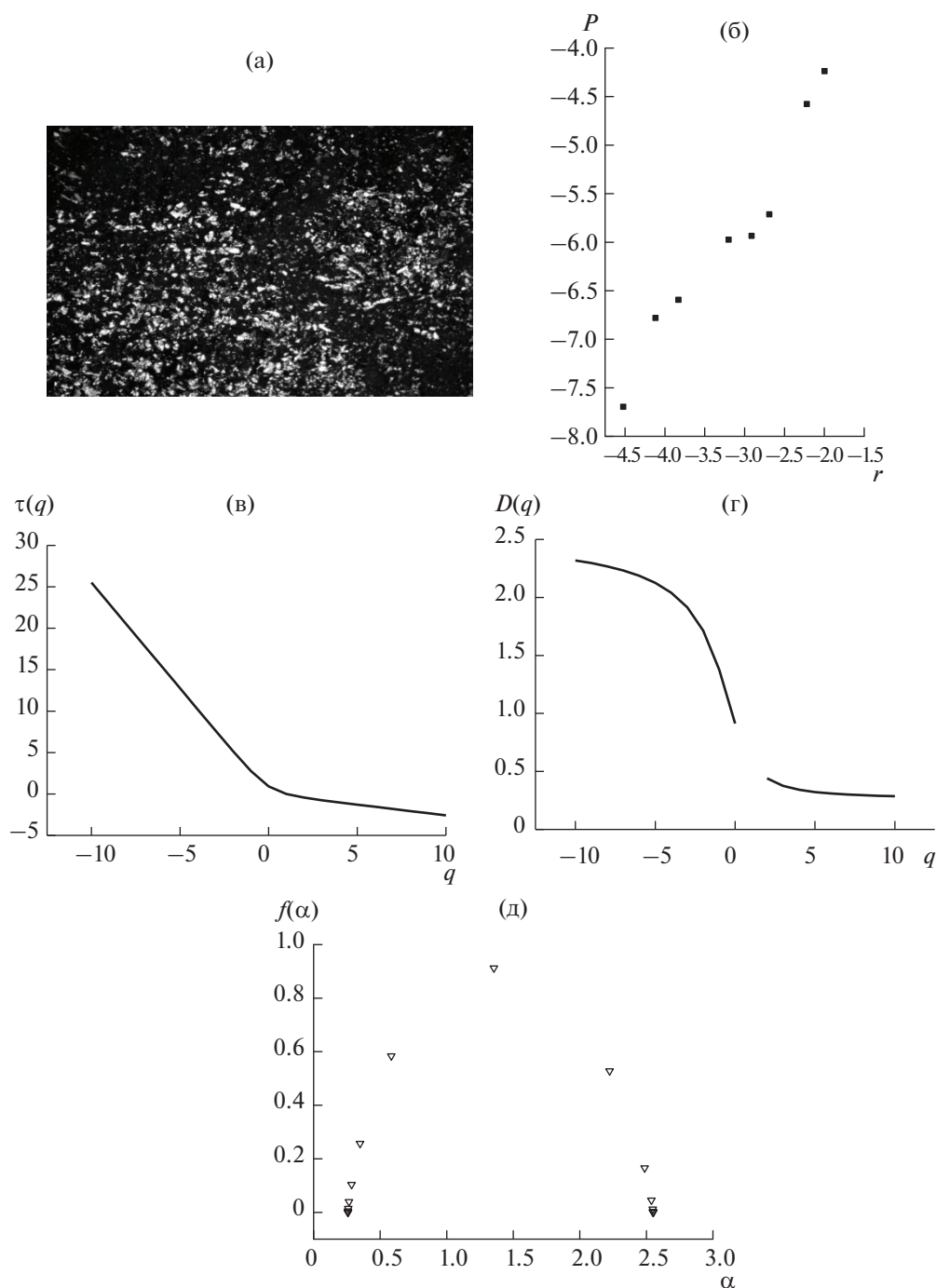
$\tau(q)$  — рис. 7в; обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  — рис. 7г; спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  — рис. 7д.

Результаты расчетно-теоретических исследований явления динамического разрушения, дис-

пергирования металлов и развитой турбулентности, представленные на рис. 4–7, подобны.

Спектр сингулярностей  $f(\alpha)$ , как характеристика кинетики неравновесной системы, показывает, что сложное нерегулярное поведение нерав-

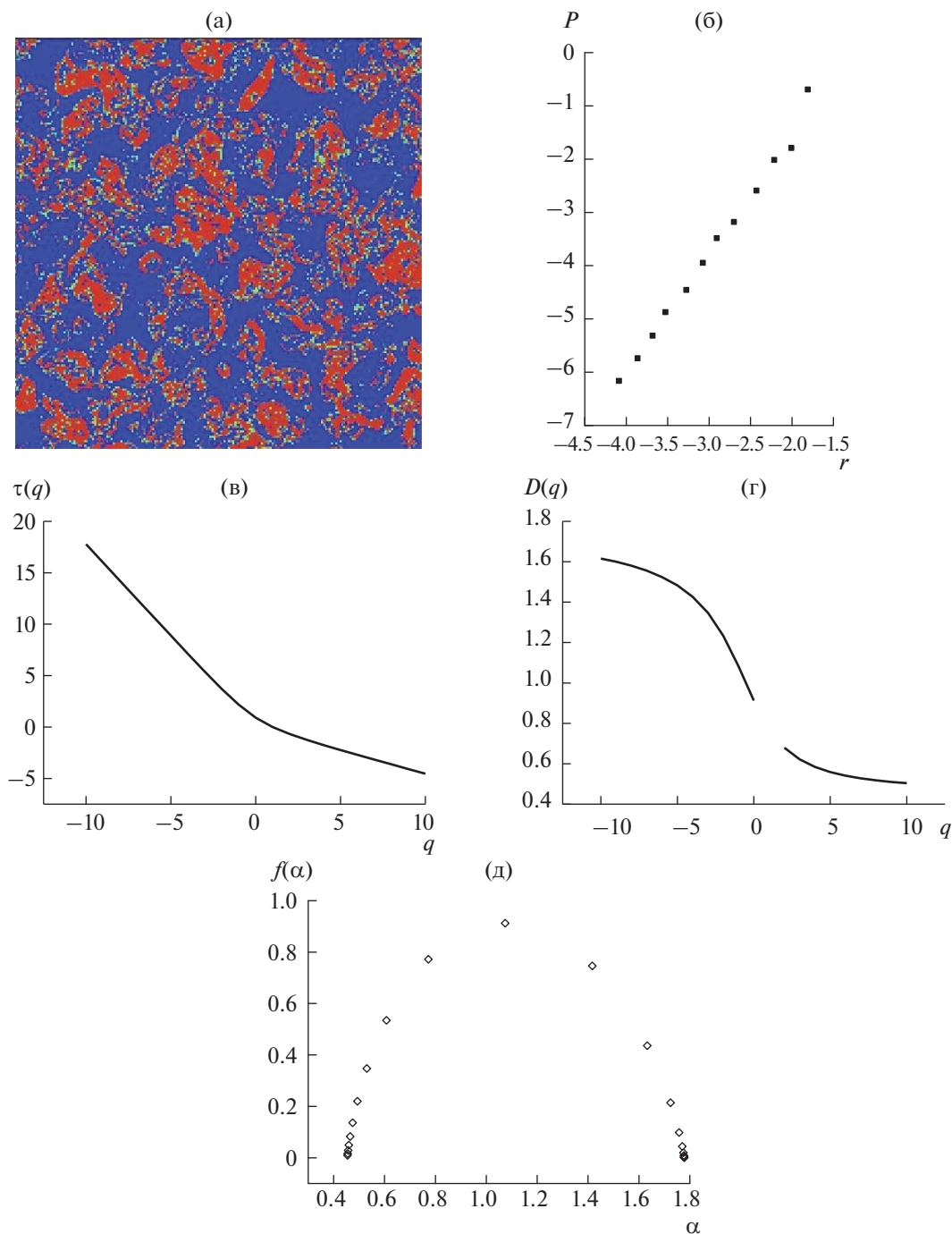




**Рис. 6.** Внешний вид диспергированных частиц из медной пирамидки ( $\alpha \sim 60^\circ$ ) после воздействия релятивистских электронных пучков (а); спектр времен ожиданий  $t_{ож}$  (б); показатель массы  $\tau(q)$  (в); обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  (г); спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  диспергированных частиц на макро масштабном уровне (д).

новесного процесса может быть описано в рамках строгого математического формализма. Установление масштабно-инвариантной структуры процесса обусловлено не манипуляциями, упрощающими сингулярные меры, а напротив — увеличе-

нием объема исследуемых данных: рассмотрение переменных  $\tau(q)$ ,  $D(q)$ ,  $\alpha(q)$ ,  $f(\alpha)$  при значительном изменении показателя массы  $q$  от  $-10$  до  $10$ . Отметим, что в силу недифференцируемости мультифрактальных мер, перестройка структуры кинетики



**Рис. 7.** Изображение гравитационного турбулентного перемешивания двух несжимаемых жидкостей разной плотности, движущихся с постоянным ускорением (а); спектр времен ожидания  $t_{\text{ож}}$  (б); показатель массы  $\tau(q)$  (в); обобщенная фрактальная размерность  $D(q)$  (г); спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  (д).

процесса не может быть получена интегрированием каких-либо дифференциальных уравнений, упрощенно моделирующих эволюцию системы.

Иными словами описание рассматриваемых неравновесных систем не может быть получено на языке траекторий — интегрированием диффе-

ренциальных уравнений, но может быть получено на языке ансамблей. Кинетика неравновесных систем происходит в пространстве (множестве) масштабов, следовательно, она может быть получена с помощью масштабных преобразований. Мультифрактальное описание физических си-

стем представляет собой, по сути, статистическое описание, которое можно сравнить с термодинамическим описанием на языке ансамблей.

В работе [20] вводится функция распределения вероятностей подсистем по энергиям  $w_n$ , а энтропия системы определяется как среднее значение логарифма функции распределения

$$S = -\sum w_n \ln w_n.$$

Спектр сингулярностей мультифрактальной меры описывается выражением (1). Выражая  $\alpha$  через  $\alpha = d\tau(q)/dq$  получаем выражение для  $f(q)$ , как функцию аргумента  $q$ , которая имеет вид

$$f(q) = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^q(q, r) \ln p_i(q, r)}{\ln r}.$$

Это выражение аналогично виду для энтропии [20] для  $q = 1$ . Энтропия разбиения меры по ячейкам  $r$  есть

$$S = f(q) \ln r.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты расчетно-теоретических исследований явления динамического разрушения, гидродинамического перемешивания, диспергирования металлов и развитой турбулентности, приведенные в работе, показали, что эти явления являются мультифрактальными процессами, а функция  $f(\alpha)$  является аналогом энтропии меры разбиения по ячейкам.

В работе предложена феноменологическая схема образования мультифрактального каскада элементов диссипативных структур и соотношения связывающие фрактальные размерности каскада диссипативных структур с концентрационным критерием, контролирующим переход неравновесной системы с одного масштабно-временного уровня на другой.

Результаты проведенных исследований ряда неравновесных процессов показали, что кинетика возникновения диссипативных структур имеет свойства последовательности событий, временные интервалы между которыми имеют статистически самоподобные распределения.

Спектр сингулярностей мультифрактальной меры, описывающий ряд времен ожиданий, является характеристикой рассмотренных нелинейных процессов. С физической точки зрения спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  можно рассматривать как количественную характеристику неравновесных систем, находящихся в процессе бифуркационных переходов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. Сельченкова Н.И., Учаев А.Я. // Ядерн. физ. инженер. 2024. Т. 15 (1). С. 48–56.
2. Сельченкова Н.И., Учаев А.Я. Динамические диссипативные процессы разрушения и диспергирования металлов как аналоги критических явлений. 2023. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ.
3. Feigenbaum M., Jensen M., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57 (13). P. 1503–1506.
4. Захаров В.С. // Нелинейный мир. 2010. Т. 8 (4). С. 234–241.
5. Лукк А.А., Дещеревский А.В., Сидорин А.Я., Сидорин И.А. // Вариации геофизических полей как проявление детерминированного хаоса во фрактальной среде. 1996. Москва: ОИФЗ РАН.
6. Стаховский И.Р. // Физика Земли. 2012. № 11–12. С. 47–53.
7. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. 1967. Москва: Наука.
8. Дерибас А.А., Захаренко И.Д. // Физ. гор. взрыва. 1975. Т. 11 (1). С. 151–153.
9. Дерибас А.А., Кудинов В.М., Матвеев Ф.И. и др. // Физ. гор. взрыва. 1968. Т. 4 (1). С. 100–107.
10. Дерибас А.А. Физика упрочения и сварки взрывом. 1980. Новосибирск: Наука.
11. Илькаев Р.И., Пунин В.Т., Учаев А.Я., Новиков С.А., Кошелева Е.В., Платонова Л.А., Сельченкова Н.И., Юкина Н.А. // Докл. акад. наук. 2003. Т. 393 (3). С. 326–331.
12. Мандельброт Б. Природная фрактальная геометрия. 2010. Москва: Институт компьютерных исследований.
13. Atmanspacher H., Scheigraber H., Wiedemann G. // Phys. Rev. A. 1989. V. 40 (7). P. 3954–3963.
14. Halsey Th.C., Jensen M.H., Procaccia I., et al. // Phys. Rev. A. 1986. V. 33 (2). P. 1141–1151.
15. Chhabra A., Jensen R.V. // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62 (12). P. 1327–1330.
16. Glazier J.A., Jensen H., Libchaber A., et al. // Phys. Rev. A. 1986. V. 34 (2). P. 1621–1624.
17. Федер Е. Фракталы (пер. с англ.). 1991. Москва: Мир.
18. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы: миниатюры из бесконечного рая. Данилов Ю.А., Логунов А.Р. (пер.). Борисов А.В. (ред.). 2001. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика.
19. Учаев А.Я., Пунин В.Т., Новиков С.А., Кошелева Е.В., Платонова Л.А., Сельченкова Н.И. // ВАНТ. Сер. Материаловед. нов. матер. 2004. № 1 (62). С. 319–329.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. 1964. Москва: Наука.

## Multifractal Analysis of Time Dependences of Dissipative Structures Formation, Emerging in Non-linear Systems of Various Physical Nature

N. I. Sel'chenkova<sup>1</sup> and A. Ya. Uchaev<sup>1, \*</sup>

<sup>1</sup>FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod oblast, 607188 Russia

\*e-mail: uchaev@expd.vniief.ru

Received January 15, 2025; revised January 15, 2025; accepted January 22, 2025

**Abstract**—The paper contemplates the universal attributes of phenomena of dynamic failure, metals dispersion and full-developed turbulence. It is shown that critical behavior of non-linear systems of various physical nature is related to phenomena of self-organization, dynamic chaos and stochastic instability. This behavior is preceded by emergence (in systems) of scale-invariant time-space dissipative hierarchy structures, appearing through a cascade of bifurcation. Results of performed research of a number of nonequilibrium processes have shown that kinetics of dissipative structures emergence has properties of a chain of events, between which time intervals possess statistically self-similar distributions. The singularity spectrum of multifractal measure, describing a series of waiting times, is a characteristics of studied non-linear processes. From the point of view of physics one can address singularity spectrum  $f(\alpha)$  as a quantitative characteristic of nonequilibrium systems, existing in the bifurcation transition processes.

**Keywords:** critical behavior of non-linear systems, phenomena of dynamic failure and metals dispersion, full-developed turbulence, dissipative hierarchy structures, singularity spectrum of multifractal measure, bifurcation transitions