

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 539.124:517.588

ПРИМЕНЕНИЕ W -ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА К РАСЧЕТУ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПУСКАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ВЫХОДА ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ БЕТЕ-ГАЙТЛЕРА

© 2025 г. И. А. Иванов*

*Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д.И. Менделеева,
Санкт-Петербург, 190005 Россия*

**E-mail: i.a.ivanov@vniim.ru*

Поступила в редакцию 18.10.2024 г.

После доработки 12.02.2025 г.

Принята к публикации 18.02.2025 г.

На основании теории взаимодействия электронов с веществом (Бете, Гайтлер, Блох) при их многократном рассеянии (Гудсмит, Саундерсон) были получены аналитические выражения для коэффициента пропускания электронов и выхода энергии тормозного излучения. Эти выражения зависят от материала и толщины мишени и начальной кинетической энергии электрона. Также было получено с несущественными упрощениями аналитическое выражение для пробега электронов, с применением W -функции Ламберта.

Ключевые слова: электроны, тормозное излучение, мишень, W -функция Ламберта, пробег

DOI: 10.56304/S2079562925060090

ВВЕДЕНИЕ

Ускорители электронов с энергией в несколько десятков МэВ имеют широкое практическое применение в основном в качестве источника тормозного излучения в медицине, метрологии, а также при проведении неразрушающего контроля. Тормозное излучение генерируется в результате взаимодействия электронного пучка ускорителя с мишенью — конвертором, выполненным из материала с большим Z . Однако часть электронов первичного пучка может проходить через мишень, в результате чего образуется смешанное поле тормозного и электронного излучения. Это зависит от энергии первичных электронов, материала и толщины мишени. Знание характеристик такого поля для конкретных параметров мишени, таких как примесь электронной составляющей, выход тормозного излучения, энергетическое распределение тормозного и электронного излучения является важной задачей особенно в метрологии и медицине. Экспериментальное исследование характеристик смешанного поля, с учетом его высокой интенсивности, является сложной и подчас трудновыполнимой задачей, поэтому расчетная оценка приобретает особую ценность.

Состав смешанного поля тормозного и электронного излучения можно оценить, рассчитав коэффициент пропускания электронов и выход тормозного излучения как функции толщины мишени.

Коэффициент пропускания электронов определяют как отношение числа электронов, прошедших слой мишени толщиной x , к числу падающих электронов. Выход тормозного излучения есть отношение энергии тормозных фотонов, вышедших из мишени и образованных первичными электронами, к начальной энергии электронов.

Решения физических задач не редко содержат различные специальные функции (Бесселя, гамма-функция Эйлера и др.). В последние 30 лет появилось несколько работ в англоязычной [1–3] и русскоязычной литературе [4], посвященных сравнительно недавно появившейся специальной функции — W -функции Ламберта и ее применениям в задачах физики.

Целью настоящей работы является получение аналитических выражений для вычисления коэффициента пропускания электронов и выхода энергии тормозного излучения в зависимости от толщины и материала мишени и начальной кинетической энергии электронов. Расчет этих величин основывается на теории взаимодействия электронов с веществом Бете–Гайтлера.

РАСЧЕТ ПРОБЕГА ЭЛЕКТРОНОВ

Для расчета коэффициента пропускания электронов необходимо получить величину пробега. Рассмотрим формулу Бете–Блоха, описывающую

средние потери энергии электроном на единице длины пути за счет процессов ионизации атомов среды и излучения тормозных гамма-квантов [5]

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{tot}} &= \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}}, \\ \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} &= \frac{K(T+m)^2}{T(T+2m)} \left(\ln \left(\frac{T^2(T+2m)}{2I^2m} \right) - F^- \right), \\ F^- &= \frac{m \ln 2}{T+m} \left(2 - \frac{m}{T+m} \right) + \left(m^2 + \frac{T^2}{8} \right) / (T+m)^2, \\ \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} &= LT, \end{aligned} \quad (1)$$

где $(dE/dx)_{\text{ion}}$, $(dE/dx)_{\text{rad}}$ – потери энергии на ионизации среды и излучение, соответственно [МэВ/см], m , T – масса и кинетическая энергия электрона [МэВ], $I = 13.5Z \cdot 10^{-6}$ – потенциал ионизации [МэВ], Z – зарядовое число материала мишени, $K = 2\pi n_e r_0^2 m$ [МэВ/см], n_e – концентрация атомных электронов среды [см⁻³], $r_0 = 2.818 \cdot 10^{-13}$ – классический радиус электрона [см], $L = n_e (Z + 1.16) r_0^2 (4 \ln(183Z^{-1/3}) + 2/9) / 137$, [см⁻¹].

В приближении непрерывного замедления пробег вычисляется по формуле [6]

$$R_{\text{csda}} = \int_0^{T_0} \frac{1}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{tot}}} dT, \quad (2)$$

где T_0 – начальная кинетическая энергия электрона.

Выражение для ионизационных потерь энергии (1) упростим и запишем выражение для суммарных потерь энергии:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{tot}} = 3K \ln(\gamma T) + LT, \quad (3)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{2I^2m}$ [МэВ⁻¹].

Выражение (2) запишем с учетом формулы (3) и преобразуем

$$R_{\text{csda}} = \frac{1}{3K} \int_{1/\gamma \ln(\gamma T)}^{T_0} \frac{dT}{\ln(\gamma T) + \frac{L}{3K} T} = \frac{1}{3K\gamma} \int_0^{\ln(\gamma T_0)} \frac{dt}{te^{-t} + C}, \quad (4)$$

где $C = L/3K\gamma$. Интеграл в формуле (4) можно представить, как:

$$\frac{1}{3K\gamma} \left(\int_0^1 \frac{dt}{te^{-t} + C} + \int_1^{\ln(\gamma T_0)} \frac{dt}{te^{-t} + C} \right).$$

Первый интеграл в сумме после замены подынтегральной функции на $e^t/t - e^2C/(1+eC)$ равен:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{te^{-t} + C} &\approx \text{Ei}(1) - \text{Ei}(-W_0(-H)) - \\ &- \frac{e^2C}{1+eC} (1 + W_0(-H)), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\text{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция [7], $W_0(x)$ – основная ветвь W -функции Ламберта [4], $H = C(1+eC)/((1+eC)^2 - eC)$, e – основание натурального логарифма.

Рассмотрим второй интеграл в сумме. Делая замену переменной $u = te^{-t} + C$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_1^{\ln(\gamma T_0)} \frac{dt}{te^{-t} + C} &= \frac{\ln(\gamma T_0)}{\ln(\gamma T_0)/\gamma T_0 + C} - \frac{1}{C + 1/e} - \\ &- \int_{C+1/e}^{\ln(\gamma T_0)/\gamma T_0 + C} \frac{W_{-1}(C-u)}{u^2} du, \end{aligned} \quad (6)$$

где $W_{-1}(x)$ – дополнительная ветвь W -функции Ламберта [4]. Рассмотрим интеграл в выражении (6):

$$\begin{aligned} \int_{C+1/e}^{\ln(\gamma T_0)/\gamma T_0 + C} \frac{W_{-1}(C-u)}{u^2} du &= [y = W_{-1}(C-u)] = \\ &= - \int_{-1}^{-\ln(\gamma T_0)} \frac{ye^y(y+1)}{(C-ye^y)^2} dy. \end{aligned} \quad (7)$$

В выражении (7) нахождение первообразной от подынтегральной функции $f(y) = ye^y(y+1)/(C-ye^y)^2$ станет проще, если заменить $f(y)$ на функцию $g(y) = ye^y(y+1)/(C+2e^{\sigma y})^2$:

$$\int_{-\ln(\gamma T_0)}^{-1} \frac{ye^y(y+1)}{(C-ye^y)^2} dy \approx \int_{-\ln(\gamma T_0)}^{-1} \frac{ye^y(y+1)}{(C+2e^{\sigma y})^2} dy. \quad (8)$$

Функция $f(y)$ на отрезке $[-\ln(\gamma T_0), -1]$ для $T_0 \leq 50$ МэВ имеет колоколообразный вид. Функция $g(y)$ будет удовлетворительно аппроксимировать кривую $f(y)$, если величины и положения их максимумов, а также величины полных ширин на половине максимума (ПШПМ) будут совпадать.

Положение максимума $f(y)$ определяется уравнением:

$$\frac{d}{dy}(f(y)) = 0. \quad (9)$$

Решая уравнение (9), получаем выражение для положения максимума

$$y_m = W \left(0, (i\sqrt{3}-1)/2, (-i\sqrt{3}-1)/2; -C \right), \quad \text{где} \quad \varphi - 2, -1 - \varphi$$

$W\left(t_1, \dots, t_n; s_1, \dots, s_n; x\right)$ – обобщенная W -функция Ламберта [3], $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ – золотое сечение.

Запишем уравнение, определяющее ПШПМ:

$$f(y) = \frac{f_m}{2}, \quad (10)$$

где $f_m = f(y_m)$. Решая уравнение (10) и полагая член $f_m C^2/2$ малой величиной, получаем выражение для большего корня $y_r = W_{-2/f_m}(2/f_m + 2C)$, где $W_r(x)$ – r -функция Ламберта [3].

ПШПМ $g(y)$ и $f(y)$ должны быть равны. Соответственно

$$g(y) = \frac{f_m}{2}. \quad (11)$$

Преобразуем и перепишем уравнение (11)

$$ye^y(y+1) - \frac{f_m}{2}C^2 - 2f_mCe^{\sigma y} - 2f_me^{2\sigma y} = 0. \quad (12)$$

Для того чтобы равенство (12) выполнялось, заменим y на y_r . Получившееся уравнение решаем относительно σ и получаем:

$$\sigma = \frac{1}{y_r} \ln \left(\frac{\sqrt{2f_my_re^{y_r}(y_r+1)}}{2f_m} - \frac{C}{2} \right).$$

Перепишем интеграл из (8) как сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned} & \int_{-\ln(\gamma T_0)}^{-1} \frac{ye^y}{(C + 2e^{\sigma y})^2} dy + \\ & + \int_{-\ln(\gamma T_0)}^{-1} \frac{y^2 e^y}{(C + 2e^{\sigma y})^2} dy = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим более общий интеграл

$$I_n(y) = \int \frac{y^n e^y}{(C + 2e^{\sigma y})^2} dy.$$

Делая замену переменных $z = e^{\sigma y}$ и используя метод интегрирования по частям n раз, получаем, что интеграл $I_n(y)$ равен

$$\begin{aligned} I_n(y) = & \frac{e^y}{C^2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} y^{n-k} F_{k+1}^{k+2} \cdot \\ & \cdot \left(2, \left(\frac{1}{\sigma_{k+1}} \right); \left(1 + \frac{1}{\sigma_{k+1}} \right); -\frac{2e^{\sigma y}}{C} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $F_q^p(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$ – обобщенная гипергеометрическая функция [7]. Обозначение (a_{k+1}) в выражении (14) означает $k+1$ параметр, равный a .

Используя выражения (4)–(8), (13), (14), получаем выражение для пробега электрона с начальной энергией T_0 в заданном веществе в см

$$\begin{aligned} R_{\text{csda}}(T_0) = & \frac{C}{L} (\text{Ei}(1) - \text{Ei}(-W_0(-H))) - \\ & - \frac{e^2 C}{1 + eC} W_0(-H) - e + \frac{\ln(\gamma T_0)}{\ln(\gamma T_0)/\gamma T_0 + C} + \\ & + I_1(-\ln(\gamma T_0)) - I_1(-1) + I_2(-\ln(\gamma T_0)) - I_2(-1). \end{aligned} \quad (15)$$

На рис. 1 изображены пробеги электронов как функции T_0 для вольфрама и серебра.

В области энергий ниже 10 МэВ расхождение между формулами (2) и (15) увеличивается по мере уменьшения начальной энергии. Данное расхождение может быть результатом того, что формула Бете–Блоха для тормозной способности вещества в случае электронов и ее упрощение (3) в области энергий ниже 1 МэВ носят существенно различный характер зависимости от энергии.

КОЭФФИЦИЕНТ ПРОПУСКАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

На основании работы [9] коэффициент пропускания можно представить в виде:

$$\eta(x) = \exp(-\xi(x/R_{\text{ex}})^f), \quad (16)$$

где R_{ex} – экстраполированный пробег электронов, см, ξ , f – безразмерные коэффициенты, зависящие от параметров среды и начальной энергии электрона, x – толщина мишени, см.

Согласно работе [6], проекционный пробег определяется формулой:

$$\bar{t} = -\int_0^\infty t t_f(t) dt,$$

где $t_f(t)$ – дифференциальное распределение наиболее дальних глубин проникновения в мишень, т.е. $t_f(t) = d\eta(t)/dt$. Обозначим величину ξ/R_{ex}^f за q . С учетом выражения (16), после интегрирования, выражение для проекционного пробега будет иметь вид:

$$\bar{t} = q^{-1/f} \Gamma\left(1 + \frac{1}{f}\right).$$

Для электронов проекционный пробег с максимальной глубиной проникновения t_{max} связан соотношением [6] $t_{\text{max}} \cong 2\bar{t}$.

В первом приближении уравнение, связывающее R_{csda} и t_{max} , имеет вид:

$$R_{\text{csda}} = \frac{t_{\text{max}}}{\cos\theta}, \quad (17)$$

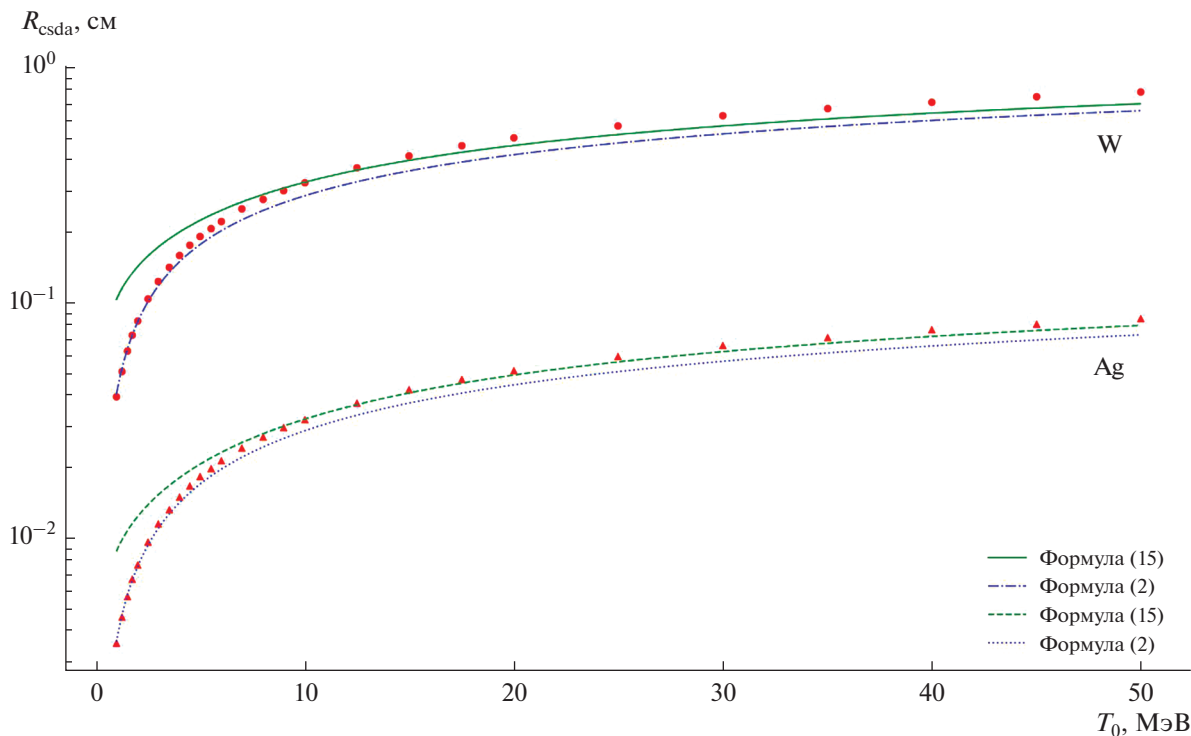


Рис. 1. Сравнение аналитических (15) и рассчитанных численным интегрированием (2) кривых пробегов электронов в зависимости от T_0 для вольфрама и серебра. Точки соответствуют данным из [8].

где θ — угол отклонения траектории электрона от первоначального движения после прохождения толщины t_{\max} . Эту величину определим из средне-квадратичного отклонения угла многократного рассеяния из теории Гоудсмита и Саундерсона [10]

$$\bar{\theta}^2 = at_{\max} \ln(b\sqrt{t_{\max}}),$$

где

$$a = \frac{2\pi Z^2 r_0^2 m^2 n}{\left[\left(1 - (m/(T_0 + m))^2 \right) (T_0 + m) \right]^2},$$

$$b = \frac{1.1 Z^{\frac{2}{3}} r_0}{\alpha E_0 (1 - (m/E_0)^2)} \sqrt{\frac{\pi n}{2} (E_0^2 - m^2)},$$

n — концентрация атомов среды, см^{-3} , E_0 — полная начальная энергия электрона [МэВ], $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Решая уравнение (17), разложив косинус до члена первого порядка и используя свойство $\exp(nW(x)) = (x/W(x))^n$ [4], получаем следующее выражение

$$q = \left(\Gamma \left(1 + \frac{1}{f} \right) a W_0 \left(4b^2 \exp \left(\frac{4}{R_{\text{csda}} a} \right) / a \right) / 2 \right)^f. \quad (18)$$

Коэффициент пропускания приобретает вид: $\eta(x) = \exp(-qx^f)$.

Толщину мишени, за которой поток электронов уменьшается в два раза, обозначим как t_0 . На этой толщине кривая коэффициента пропускания электронов имеет максимальное значение производной. Величина t_0 имеет следующий вид:

$$t_0 = q^{-\frac{1}{f}} \left(1 - \frac{1}{f} \right)^{1/f}.$$

Запишем производную функции $\eta(x)$ в точке t_0 , продифференцировав $\eta(x)$, а также, в геометрическом смысле

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = -q^{1/f} (f-1) \left(1 - \frac{1}{f} \right)^{-1/f} \exp \left(\frac{1}{f} - 1 \right), \quad (19)$$

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = -\frac{1}{2(R_{\text{ex}} - t_0)}. \quad (20)$$

В работе [11] отношение R_{ex} к \bar{t} задается следующим выражением:

$$R_{\text{ex}} = \bar{t} \frac{s_0 + 2}{(1 + \exp(-s_0)) \ln(1 + \exp s_0)},$$

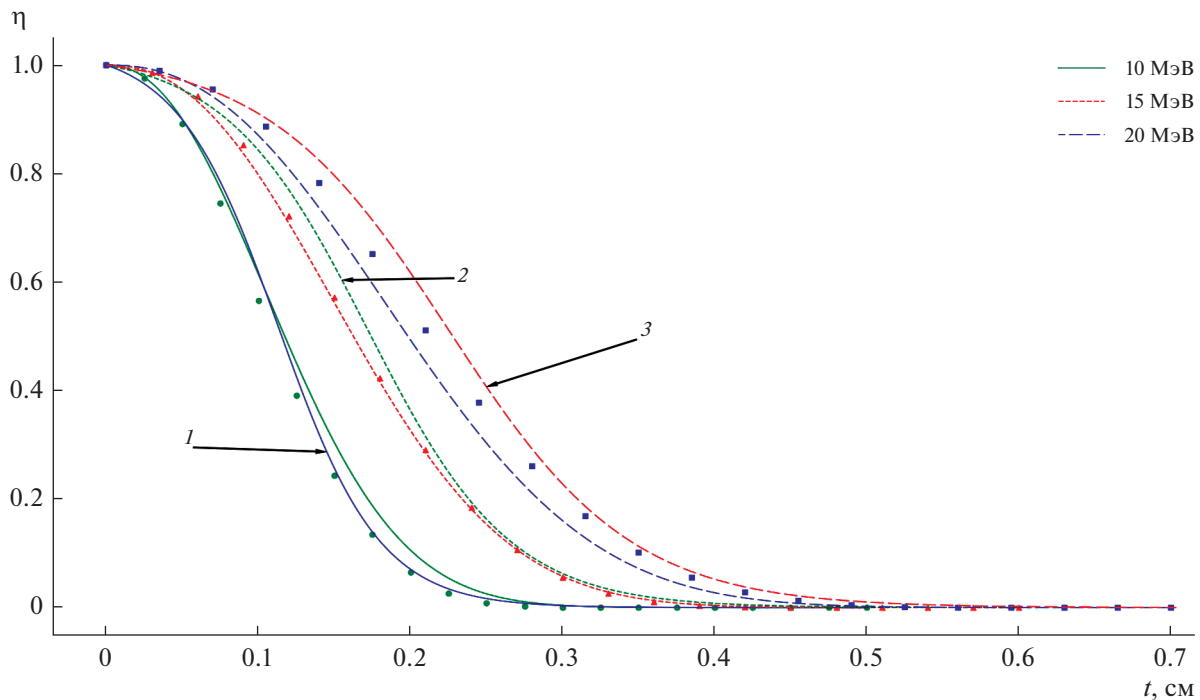


Рис. 2. Зависимость коэффициентов пропускания электронов $\eta(t)$ от толщины мишени t при T_0 : 10 МэВ ($f = 2.21$), 15 МэВ ($f = 2.31$), 20 МэВ ($f = 2.35$). Коэффициенты пропускания из работы [11]: 1 – 10 МэВ, 2 – 15 МэВ, 3 – 20 МэВ. Точки соответствуют расчету Монте-Карло: ● – 10 МэВ, ▲ – 15 МэВ, ■ – 20 МэВ.

где $s_0 = a_1 \exp(-a_2/(1 + a_3 \tau_0^{a_4}))$, $a_1 = 10.63/Z^{0.232}$,
 $a_2 = 0.22Z^{0.463}$, $a_3 = 0.042$, $a_4 = 1.86$, $\tau_0 = E_0/m$.

Приравнявая выражения (19) и (20), получаем уравнение для определения параметра f

$$q^{1/f} (f - 1) \exp\left(\frac{1}{f} - 1\right) = \frac{(1 - 1/f)^{1/f}}{2(R_{\text{ex}} - t_0)}.$$

Используя программу переноса излучения GEANT 4, были получены коэффициенты пропускания электронов из вольфрамовой мишени (рис. 2). Для определения физических процессов в модели использовался класс G4EmLivermorePhysics.

На рис. 2 коэффициенты пропускания для начальной кинетической энергии электронов 10, 15 и 20 МэВ в интервале толщин $0 - R_{\text{ex}}$ см имеют относительное отклонение от расчета методом Монте-Карло не более 40, 1.9 и 20%, соответственно. Причиной расхождений может являться иной, от формулы Бете–Блоха, ход кривой энергетических потерь, предложенной в упрощенном виде выше, при энергиях ниже 1 МэВ. Также при расчете коэффициентов формулы (16) не учтены флуктуации потерь энергии и пробегов и эффект плотности среды.

ВЫХОД ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Для расчета выхода энергии тормозных гамма-квантов из мишени будем учитывать только полные потери энергии первичных электронов и процессы поглощения тормозных гамма-квантов в веществе.

В работе авторы [12] приводят выражение для энергии тормозных гамма-квантов, вышедших из мишени толщиной t

$$Y(t) = \int_0^t \eta(x) \exp(-\mu(t-x)) \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} dx, \quad (21)$$

где μ – линейный коэффициент поглощения фотонного излучения $[\text{см}^{-1}]$.

Выражение для потерь энергии на излучение зависит от кинетической энергии электрона T_0 . По мере проникновения электрона вглубь мишени T_0 будет уменьшаться и на глубине x его энергия будет равна $T(x)$. Для получения зависимости $T(x)$ приведем выражение для ионизационных потерь энергии к линейному виду. Разложим логарифм в (3) в ряд Тейлора в окрестности точки T_0 и вычтем некоторый параметр τ :

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} = 3K \left(\ln(\gamma T_0) + \frac{T - T_0}{T_0} \right) - \tau. \quad (22)$$

Находим τ , минимизируя интеграл от квадрата разности между упрощенной формулой $(dE/dx)_{\text{ion}}$ и выражением (22):

$$\int_{1/\gamma}^{T_0} \left(3K \ln(\gamma T) - \left(\frac{3K}{T_0} T + 3K \ln\left(\frac{\gamma T_0}{e}\right) - \tau \right) \right) dT \rightarrow \min,$$

$$\tau = 3K \frac{2 \ln(1/\gamma T_0)/\gamma + (T_0^2 - 1/\gamma^2)/T_0}{2(T_0 - 1/\gamma)},$$

где e — основание натурального логарифма. Выражение для полных потерь энергии приобретает вид

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{tot}} = 3K \left(\frac{T}{T_0} + \ln\left(\frac{\gamma T_0}{e}\right) \right) - \tau + LT. \quad (23)$$

Разделяя переменные в (23) и интегрируя от T до T_0 и от 0 до x левую и правую части уравнения, соответственно, находим зависимость кинетической энергии электрона от пройденного им пути в материале мишени

$$T(x) = \frac{1}{r} \left(\left(rT_0 + 3K \ln\left(\frac{\gamma T_0}{e}\right) - \tau \right) \exp(-rx) - \left(3K \ln\left(\frac{\gamma T_0}{e}\right) - \tau \right) \right), \quad (24)$$

где $r = 3K/T_0 + L$.

Перепишем выражение для потерь энергии на излучение с учетом (24)

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{rad}}(x) = \Gamma e^{-rx} - \Lambda, \quad (25)$$

где $\Gamma = L(rT_0 + 3K \ln(\gamma T_0/e) - \tau)/r$, $\Lambda = L(3K \cdot \ln(\gamma T_0/e) - \tau)/r$.

После подстановки (25) в (21) и соответствующих преобразований с учетом того, что $f = 2-2.5$ для T_0 до 50 МэВ, вычисление интеграла (21) приводит к следующему выражению:

$$Y(t) = \delta \left(\mathcal{A} \mathcal{B} + \frac{\Gamma}{2} \exp\left(\frac{1}{4} \epsilon^2 q^{-\frac{2}{f}}\right) \mathcal{D} - \frac{\Lambda}{2} \exp\left(\frac{1}{4} \mu^2 q^{-\frac{2}{f}}\right) \mathcal{F} \right), \quad (26)$$

где $\mathcal{A} = \gamma(1/f, h^f)/f\sqrt{\pi} - \text{erf}(h)/2$, $\mathcal{B} = \Gamma e^{\epsilon t} - \Lambda e^{\mu t}$, $\delta = \sqrt{\pi} e^{-\mu t} q^{-1/f}$, $h = tq^{1/f}$, $\epsilon = \mu - r$, $\mathcal{D} = \text{erf}(h - \epsilon/2q^{1/f}) + \text{erf}(\epsilon/2q^{1/f})$, $\mathcal{F} = \text{erf}(h - \mu/2q^{1/f}) + \text{erf}(\mu/2q^{1/f})$, $\gamma(v, x)$ — нижняя неполная гамма-функция [7], $\text{erf}(x)$ — функция ошибок [7].

ОЦЕНКА μ

В выражениях (21), (26) линейный коэффициент поглощения фотонного излучения μ является

константой, но в общем случае этот параметр зависит от энергии гамма-кванта E_γ . С целью упрощения вычислений оценим μ . Согласно работе [12], число тормозных гамма-квантов с энергиями $k - k + dk$, образуемых в элементарном слое dx материала мишени, равно

$$\frac{dn_\gamma(k, x)}{dk} dk dx = \frac{X_0 n}{\rho} \left(\frac{d\sigma_T(k, x)}{dk} \right)_s dk dx,$$

где $\left(\frac{d\sigma_T(k, x)}{dk} \right)_s$ — дифференциальное сечение образования тормозного излучения электроном с энергией T_0 , полученное Шиффом [12], X_0 — радиационная длина [г/см²], ρ — плотность вещества [г/см³].

Запишем спектр тормозного излучения, формируемого первичным электронами, в мишени толщиной t :

$$\frac{dN_\gamma}{dk} dk = \int_0^t \eta(x) \frac{dn_\gamma(k, x)}{dk} dk dx.$$

Из этого спектра находим среднюю энергию гамма-квантов с энергиями от 1 кэВ до T_0 как функцию толщины мишени t :

$$\overline{E}_\gamma(t) = \int_{0.001}^{T_0} k \frac{dN_\gamma}{dk} dk \bigg/ \int_{0.001}^{T_0} \frac{dN_\gamma}{dk} dk.$$

Используя [13] и интерполируя для $\overline{E}_\gamma(t)$, находим параметр μ как функцию от толщины мишени $\mu = \mu(\overline{E}_\gamma(t))$.

Зависимость выхода энергии тормозного излучения от толщины вольфрамовой мишени t в сравнении с расчетом в программе GEANT 4 и работой [14] показана на рис. 3.

Относительное отклонение формулы (26) от рассчитанного выхода энергии методом Монте-Карло в интервале толщин, показанных на рис. 3, составляет не более 33, 33 и 31% для T_0 равной 10, 15, 20 МэВ соответственно.

Из рис. 3 следует, что для кривых выхода, даваемых формулой (26), в области относительно небольших толщин вольфрамовых мишеней, расхождение с Монте-Карло больше, чем у функции выхода, полученной в работе [14]. При увеличении толщины мишени расхождение формулы (26) с Монте-Карло уменьшается, расхождение результатов работы [14] — увеличивается. Следует отметить, что кривая $Y(t)$, полученная в настоящей работе, качественно лучше согласуется по форме с данными GEANT 4, чем работа [14].

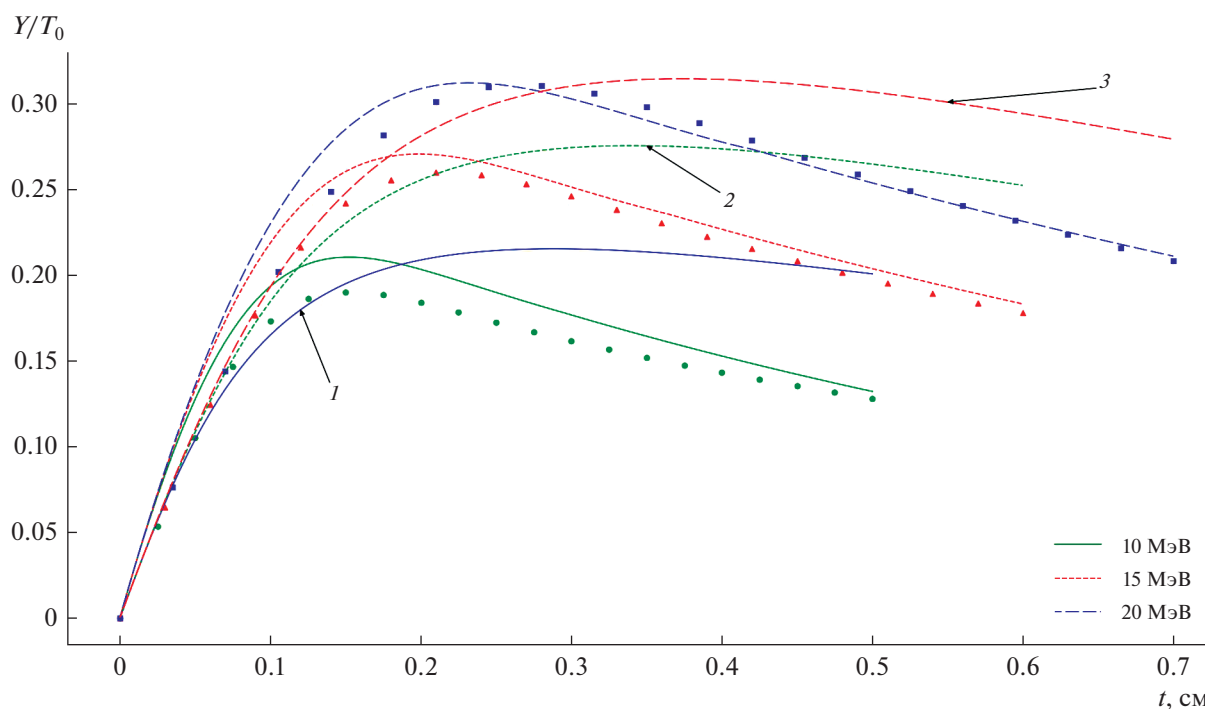


Рис. 3. Зависимость выхода энергии тормозного излучения, нормированного на T_0 , от толщины вольфрамовой мишени t при T_0 : 10, 15, 20 МэВ. То же из работы [14]: 1 – 10 МэВ, 2 – 15 МэВ, 3 – 20 МэВ. Точки соответствуют расчету, выполненному методом Монте-Карло: ● – 10 МэВ, ▲ – 15 МэВ, ■ – 20 МэВ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен метод для расчета коэффициента пропускания электронов и выхода энергии тормозного излучения как функций от толщины мишени. Получено аналитическое выражение для пробега электронов, как функции их начальной кинетической энергии, с использованием W -функции Ламберта и ее обобщений. С применением данной специальной функции найдены коэффициенты в выражении для вычисления коэффициента пропускания электронов. Используя выражение Бете–Блоха для средних потерь энергии электроном на единице длины пути за счет излучения тормозных гамма-квантов, получено аналитическое выражение выхода энергии тормозного излучения из мишени данного материала.

Продемонстрирована еще одна задача математической физики помимо уже известных [4, 15], которая решена с использованием W -функции Ламберта. Это говорит о важности данной специальной функции для математической физики.

Полученные выражения для величин $\eta(t)$ и $Y(t)$ могут быть использованы в качестве их оценки при решении прикладных задач с использованием тормозного излучения, в области энергий электронов до 20 МэВ. Например, для оптимизации толщины мишени – конвертора при созда-

нии полей тормозного излучения с использованием электронных ускорителей. В области метрологии ионизирующих излучений – для оценки характеристик полей тормозного и электронного излучений. В медицинской физике – для обеспечения гарантии качества облучения пациентов. Кривая коэффициента пропускания электронов может использоваться для оценки толщины защиты из определенного материала от моноэнергетического электронного излучения в барьерной геометрии.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит В.А. Тренкина за ценные обсуждения при написании настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5 (1). P. 329.
2. Mezo I. // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 455 (1). P. 538.
3. Mezo I., Baricz A. // Transact. Amer. Math. Soc. 2017. V. 369 (11). P. 7917.
4. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W -функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики: Учеб. пособ. для вузов. 2006. Саратов: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ».

5. Стародубцев С.В., Романов А.М. Прохождение заряженных частиц через вещество. 1962. Ташкент: Акад. наук УзССР.
6. Attix F.H. Introduction to radiological physics and radiation dosimetry. 2004. Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.
7. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of integrals, series, and products. 2007. Academic Press.
8. <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>.
9. Королюк В.Н., Усова Л.В. // Аналитика и контроль. 2002. Т. 6 (4). С. 353.
10. Goudsmit S., Saunderson J.L. // Phys. Rev. 1940. V. 57 (1). P. 24.
11. Lazurik V., Moskvina V., Tabata T. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1998. V. 45 (3). P. 626.
12. Belyshev S.S., Dzhilavyan L.Z., Stopani K.A. // Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. 2019. V. 83 (4). P. 458.
13. <https://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoeff/tab3.html>.
14. Isaev V.I., Kovalev V.P. // At. Energy. 1984. V. 56 (6). P. 425.
15. Scott T., Mann R., Martinez H.R. // Appl. Algebra Eng. Commun. Comput. 2006. V. 17 (1). P. 41.

Application of the Lambert W-function to the Calculation of the Electron Transmission Coefficient and the Yield of Bremsstrahlung from the Bethe-Heitler Theory

I. A. Ivanov*

Mendeleyev Institute for Metrology VNIIM, Saint-Petersburg, 190005 Russia

**e-mail: i.a.ivanov@vniim.ru*

Received October 18, 2024; revised February 12, 2025; accepted February 18, 2025

Abstract—Based on the theory of the interaction of electrons with matter (Bethe, Heitler, Bloch) during their multiple scattering (Goudsmit, Saunderson), analytical expressions were obtained for the electron transmission coefficient and the energy yield of bremsstrahlung. These expressions depend on the material and thickness of the target and the initial kinetic energy of the electron. An analytical expression for the electron range was also obtained with insignificant simplifications, using the Lambert-function.

Keywords: electrons, bremsstrahlung, target, Lambert-function, range