

## УСКОРИТЕЛИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

УДК 621.384.6

### СПИНОРНОЕ ОПИСАНИЕ СТРУКТУР ТИПА ЗАМОРОЖЕННОГО И КВАЗИ-ЗАМОРОЖЕННОГО СПИНА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЭДМ МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

© 2025 г. А. А. Мельников<sup>а, б, с, \*</sup>, Ю. В. Сеничев<sup>а, с</sup>, А. Е. Аксентьев<sup>а, с, d</sup>, С. Д. Колокольчиков<sup>а, с</sup>

<sup>а</sup>Институт ядерных исследований РАН, Москва, 117312 Россия

<sup>б</sup>Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., 142432 Россия

<sup>с</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Московская обл., 141701 Россия

<sup>d</sup>Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409 Россия

\*E-mail: alexei.a.melnikov@gmail.com

Поступила в редакцию 29.04.2024 г.

После доработки 29.04.2024 г.

Принята к публикации 15.05.2024 г.

Основные характеристики структур типа замороженного и квази-замороженного спина, такие как направление инвариантной оси и спин-тун, были рассчитаны в рамках спинорного формализма. В силу того, что радиальные возмущения поля играют основную роль с точки зрения систематических ошибок в эксперименте по поиску Электрического Дипольного Момент (ЭДМ), различие обоих типов структур было рассмотрено в этом отношении. Была исследована возможность исключения нелинейной добавки к частоте спин-прецессии при изменении направления инжекции в квази-замороженной структуре. Также был получен закон сложения частот для структуры общего вида с возмущениями поля в радиальном, вертикальном и продольном направлениях.

**Ключевые слова:** спин-орбитальная динамика, спиновый резонанс, замороженный спин, квази-замороженный спин, спинорная алгебра, электрический дипольный момент

DOI: 10.56304/S2079562925010142

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из перспективных методов измерения ЭДМ является метод замороженного спина [1]. При этом вектор спина частиц движется сонаправлено с вектором импульса. Структуры типа замороженного спина представляют собой накопительные кольца, специально спроектированные для решения экспериментальной задачи по поиску ЭДМ. В синхротронах, изначально не предназначенных для поиска ЭДМ, можно реализовать режим квази-замороженного спина [2]. При этом на прямых участках размещаются фильтры Вина, компенсирующие действие поворотных магнитов на спин.

Основным методом измерения ЭДМ, позволяющим достичь точности в  $10^{-29}$  е см, является метод частотной области. При этом измеряется полная частота спин-прецессии, вызванная наличием электрического и магнитного дипольного момента (ЭДМ и МДМ), в точке поляриметра в структуре с возмущениями полей в элементах [3]. В концепции линейного вклада локальных частот в общее значение можно вычесть систематические эф-

фекты от магнитного дипольного момента, инжектируя пучок в противоположном направлении. Таким образом, необходимо получить точную форму связи общей частоты с локальными поворотами спина, что послужит для оценки измеряемой величины ЭДМ.

## 1. СПИНОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Спиновая динамика частиц в лабораторной системе определяется уравнением Т-БМТ:

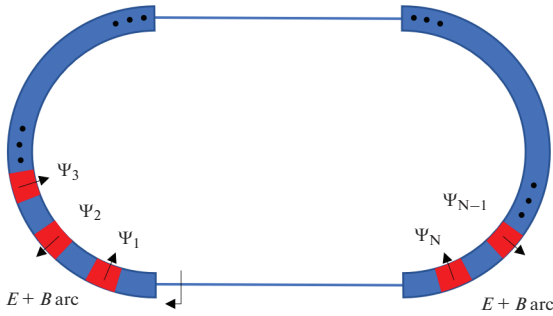
$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times (\boldsymbol{\Omega}_{\text{МДМ}} + \boldsymbol{\Omega}_{\text{ЭДМ}}),$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{МДМ}} = \frac{q}{m\gamma} \cdot$$

$$\cdot \left[ (\gamma G + 1) \mathbf{B}_{\perp} + (1 + G) \mathbf{B}_{\parallel} - \gamma \left( G + \frac{1}{\gamma + 1} \right) \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}}{c} \right] \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{ЭДМ}} = \frac{q\eta}{2m} \left[ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{E}}{c} \right],$$

где  $m$ ,  $q$  — масса и заряд частицы,  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  — релятивистский бета- и Лоренц



**Рис. 1.** Структура типа замороженного спина, состоящая из двух  $E + B$  поворотных арок с  $N$  радиальными возмущениями.

факторы.  $\Omega_{\text{MDM}}$  и  $\Omega_{\text{EDM}}$  — частоты прецессии спин-вектора  $\mathbf{S}$ , вызванные наличием магнитного и электрического дипольного момента частиц.  $G$  — аномальный магнитный момент.

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}$ ,  $\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}}{v^2} \mathbf{v}$ . Безразмерный  $\eta$  фактор связан с величиной ЭДМ  $d$  и спина  $s$  частицы:

$$d = \frac{\eta q}{2mc} s.$$

Поле каждого элемента  $\mathbf{S}$  вращается вокруг  $\Omega$  на угол  $\phi = \Omega dt$ , что сигнализирует о возможности матричного или спинорного описания спиновой динамики. Последнее также мотивируется тем фактом, что ключевые измеряемые величины в эксперименте, приведенная частота спин-прецессии или спин-тун  $v_s$  и направление инвариантной оси  $\mathbf{n}$  в точке наблюдения, есть интегральные характеристики структуры и могут быть вычислены в рамках спинорного формализма.

Ниже приведем основные соотношения для спинорной алгебры в применении к описанию структур и элементов накопительных колец [4]. Координатная система определяется индексами: (1, 2, 3) = (радиально наружу, продольно вперед, вертикально вверх). Матрицы Паули  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

$$\sigma = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right).$$

Оператор вращения  $M$  на угол  $\phi$  вокруг направления  $\mathbf{n}$  представляется в виде:

$$M = \exp \left[ -i (\sigma \cdot \mathbf{n}) \frac{\phi}{2} \right] = \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) - i (\sigma \cdot \mathbf{n}) \sin \left( \frac{\phi}{2} \right). \quad (2)$$

Для накопительного кольца, состоящего из  $N$  элементов, полная матрица есть:

$$M = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1. \quad (3)$$

Из (2) и (3) очевидно, что в точке наблюдения с азимутом  $\theta$ :

$$\cos(\pi v_s) = \frac{1}{2} \text{tr}(M(\theta)), \quad (4a)$$

$$\mathbf{n}(\theta) = \frac{i/2}{\sin(\pi v_s)} \text{tr}(\sigma M(\theta)). \quad (4b)$$

Для элемента, вращающего  $\mathbf{S}$  вокруг вертикальной оси на угол  $\phi$ , например, дипольного магнита или фильтра Вина, оператор вращения принимает вид:

$$M_{\text{Dip,WF}} = \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) - i \sigma_3 \sin \left( \frac{\phi}{2} \right). \quad (5)$$

Для радиального возмущения, вращающего  $\mathbf{S}$  на угол  $\psi$  оператор вращения есть:

$$M_{\text{Perturb}} = \cos \left( \frac{\psi}{2} \right) - i \sigma_1 \sin \left( \frac{\psi}{2} \right). \quad (6)$$

## 2. СТРУКТУРА ТИПА ЗАМОРОЖЕННОГО СПИНА

Рассмотрим структуру типа замороженного спина для поиска ЭДМ [1]. Идеальная невозмущенная структура характеризуется тождественной матрицей преобразования  $M=I$ . То же верно и для каждого сегмента накопительного кольца. Если в структуре присутствуют  $N$  радиальных возмущений  $\psi_i$  (рис. 1), то из точки наблюдения в прямой секции структура эквивалентна:

$$\begin{aligned} M &= I \left[ \cos \left( \frac{\psi_N}{2} \right) - i \sigma_1 \sin \left( \frac{\psi_N}{2} \right) \right] \cdot \\ &\cdot I \left[ \cos \left( \frac{\psi_{N-1}}{2} \right) - i \sigma_1 \sin \left( \frac{\psi_{N-1}}{2} \right) \right] \dots = \\ &= \cos \left( \frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2} \right) - i \sigma_1 \sin \left( \frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя соотношения (4a), (4b) к (7), получим:

$$v_s = \frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2\pi}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_r, \quad \text{за исключением } \sum_{i=1}^N \psi_i = 0. \quad (8b)$$

Здесь все вращения коммутируют, что эквивалентно аккумуляции фазы экспоненты в формуле (2). Каждое радиальное возмущение приводит к строго радиальному направлению  $\mathbf{n}$  на прямой секции. И из соотношения (8a) следует, что измеряемая частота спин-прецессии есть арифметическое среднее от локальных частот  $\Omega_i$ , задаваемых уравнением Т-БМТ (1).

### 3. СТРУКТУРА ТИПА КВАЗИ-ЗАМОРОЖЕННОГО СПИНА

Рассмотрим структуру типа квази-замороженного спина с  $N$  радиальными возмущениями  $\psi_i$ . Представим структуру в виде  $N$  секторов с последовательными поворотами на углы  $\phi_i$  и  $\psi_i$  вокруг вертикального и радиального направления соответственно (рис. 2.). Предположим, что радиальные поля действуют как возмущения, так что  $\psi_i \ll 1$ . Для структуры с числом секторов  $N \gg 1$  разумно утверждать, что  $\phi_i \ll 1$ . Спиновая матрица преобразования структуры представляется в виде:

$$M = \prod_{i=1}^N M_{\text{Perturb}}(\psi_i) M_{\text{Dip}}(\phi_i). \quad (9)$$

Раскрывая произведение по индукции и сохраняя члены до второго порядка по  $(\phi, \psi)$ , получим:

$$\begin{aligned} M = & \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \phi_i}{2}\right) - i\sigma_1 \cos\left(\frac{\phi_1}{2}\right) \cdot \\ & \cdot \cos\left(\frac{\phi_2}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\phi_N}{2}\right) \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2}\right) + \\ & + \frac{i}{4} \sigma_2 s_{ij} \phi_i \psi_j - i\sigma_3 \cos\left(\frac{\psi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi_2}{2}\right) \dots \cdot \\ & \cdot \cos\left(\frac{\psi_N}{2}\right) \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^N \phi_i}{2}\right) + o(\phi, \psi)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $s_{ij} = \begin{cases} 1, i \leq j \\ -1, i > j \end{cases}$ .

Применяя резонансное условие  $\sum_{i=1}^N \phi_i = 0$  и соотношения (4a) и (4b), получим:

$$\nu_s = \frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2\pi} + o(\phi, \psi)^2, \quad (11a)$$

$$\mathbf{n} = \left[ 1 + o(\phi, \psi), -\frac{s_{ij}\phi_i\psi_j}{4\sum_{i=1}^N \psi_i} + o(\phi, \psi), o(\phi, \psi) \right]. \quad (11b)$$

Результат аналогичен случаю замороженного спина (8), но здесь появляется ненулевая продольная компонента  $\mathbf{n}$  из-за антикоммутации локальных вращений (11b). Более того, из соотношения (11a) следует, что измеряемая частота спин-прецессии есть арифметическое среднее локальных частот только до второго порядка разложения Тейлора.

Из разложения матрицы до более высокого порядка по  $(\phi, \psi)$  следует, что:

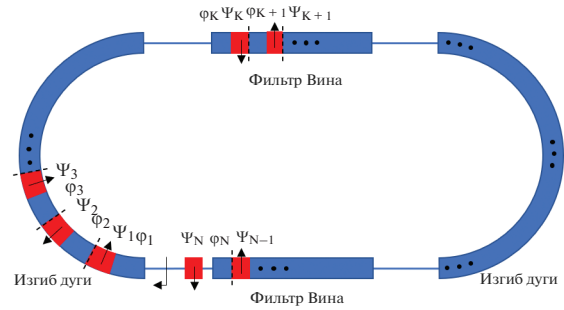


Рис. 2. Структура типа квази-замороженного спина с  $N$  радиальными возмущениями.

$$\nu_s - \frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2\pi} \sim \phi_i \psi_j \phi_k \psi_l + o(\phi, \psi)^4, \quad (12)$$

где  $i, j, k, l$  — индексы элементов накопителя. Процедура обратной инжекции при смене полярности поля характеризуется, во-первых, обратным порядком перемножения матриц и, во-вторых, сменой знака радиальных возмущений  $\psi_i \rightarrow -\psi_i$ . При этих условиях

$$\text{tr}(M_{\text{CW}}) = \text{tr}(M_{\text{CCW}}), \quad (13)$$

и нелинейная добавка к частоте является одинаковой при прямой (CW) и обратной (CCW) инжекции.

При учете ЭДМ вращения вокруг радиальной оси в диполях на угол  $\psi_{\text{EDM}i}$  можно показать, что приведенная частота спин-прецессии факторизуется в виде:

$$\nu_s = \frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2\pi} + \frac{\sum_{i=1}^N \psi_{\text{EDM}i}}{2\pi} + o(\phi, \psi)^3, \quad (14)$$

где ведущие члены нелинейной добавки были получены выше. Для типичных параметров накопительных колец  $\psi_{\text{EDM}i} \ll \phi_i \psi_j \phi_k \psi_l$ . Но условия (13) и (14) свидетельствуют о возможности измерения ЭДМ частотным методом путем вычитания измеряемых частот при инжекции в прямом и обратном направлении [3].

Следует также отметить, что в возмущенной структуре типа квази-замороженного спина  $\sum_{i=1}^N \psi_i \neq 0$ . Это верно в силу того, что  $E + B$  элементы присутствуют в структуре. С наклонами последних замкнутая орбита не возмущается, но  $S$  испытывает дополнительное вращение.

### 4. СЛОЖЕНИЕ ЧАСТОТ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Одним из следующих вопросов является получение общей формы сложения частот при нали-

ции возмущений в накопительном кольце во всех трех направлениях  $(x, y, z)$ . Представим структуру общего вида как  $N$  секторов с последовательными поворотами на углы  $\xi_i$ ,  $\phi_i$  и  $\psi_i$  вокруг продольного, вертикального и радиального направления

соответственно. Спиновая матрица преобразования структуры представляется в виде:

$$M = \prod_{i=N}^1 M_{\text{Perturb}}(\psi_i) \cdot M_{\text{Dip}}(\phi_i) \cdot M_{\text{Longit}}(\xi_i). \quad (15)$$

Применяя соотношения (4a) и (4b), получим:

$$\cos(\pi v_s) = \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \phi_i}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2}\right) + o(\xi, \phi, \psi)^2, \quad (16)$$

$$v_s^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \left( \left( \sum_{i=1}^N \xi_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N \phi_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N \psi_i \right)^2 + o(\xi, \phi, \psi)^2 \right). \quad (17)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sin(\pi v_s)} \begin{cases} \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \phi_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2}\right) + o(\xi, \phi, \psi), \\ \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \phi_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i}{2}\right) + o(\xi, \phi, \psi), \\ \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^N \phi_i}{2}\right) + o(\xi, \phi, \psi). \end{cases} \quad (18)$$

Из формулы (17) следует, что частоты складываются квадратично. Данное утверждение верно с точностью до членов третьего порядка по  $(\xi, \phi, \psi)$ . Также получена зависимость направления  $\mathbf{n}$  в структуре общего вида с малыми возмущениями поля (18).

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано различие структур типа замороженного и квази-замороженного спина с точки зрения измерения ЭДМ методом частотной области. В результате аналитического исследования было продемонстрировано, что в возмущенной структуре типа квази-замороженного спина присутствует дополнительное МДМ вращение по сравнению со структурой типа замороженного спина. Также получено выражение для измеряемой частоты спин-прецессии в структуре с возмущениями поля в трех направлениях. Полученные результаты сви-

детельствуют о возможности учета систематических эффектов от действия МДМ и возможности измерения ЭДМ частотным методом. Нелинейные добавки к измеряемой частоте не ставят существенных ограничений на точность измерений метода.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ 22-42-04419.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы подтверждают, что у них нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abusaif F. et al.* (CpEDM Collab.). Storage Ring to Search for Electric Dipole Moments of Charged Particles: Feasibility Study. CERN Yellow Reports: Mono-

- graphs. 2021. V. 3. CERN-2021-003. Geneva: CERN. <https://doi.org/10.23731/CYRM-2021-003>
2. Senichev Y., Aksentyev A., Kolokolchikov S., Melnikov A., Ladygin V., Syresin E., Nikolaev N. // J. Phys.: Conf. Ser. 2022. V. 2420. P. 012052. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2420/1/012052>.
  3. Senichev Y., Aksentyev A., Ivanov A., Valetov E. // arXiv:1711.06512. 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.06512>
  4. Chao A., Mess K., Tigner M., Zimmermann F. Handbook of Accelerator Physics and Engineering. 2nd Ed. 2013. Singapore: World Scientific. P. 183–185.

## Spinor Description of Frozen and Quasi-Frozen Spin Structures for the EDM Measurement in a Frequency Domain

A. A. Melnikov<sup>1, 2, 3, \*</sup>, Yu. V. Senichev<sup>1, 3</sup>, A. E. Aksentyev<sup>1, 3, 4</sup>, and S. D. Kolokolchikov<sup>1, 3</sup>

<sup>1</sup> Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117312 Russia

<sup>2</sup> Landau Institute of Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Moscow oblast, 142432 Russia

<sup>3</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow oblast, 141701 Russia

<sup>4</sup> National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

\*e-mail: alexei.a.melnikov@gmail.com

Received April 29, 2024; revised April 29, 2024; accepted May 15, 2024

**Abstract**—The main features of the frozen and quasi-frozen spin lattice were calculated in the spinor formalism, such as a spin-tune and a direction of the invariant spin axis. As the radial field perturbations play a crucial role in the Electric Dipole Moment (EDM) measurement procedure, the difference of frozen and quasi-frozen spin lattices was investigated in this regard. The possibility of subtraction of a nonlinear term in the spin-precession frequency with the change of the injection direction in the quasi-frozen case was investigated. Furthermore, the frequency summation law was derived for the structure of a general form with perturbations in the radial, vertical and longitudinal directions.

**Keywords:** spin-orbital dynamics, spin resonance, frozen spin, quasi-frozen spin, spinor algebra, electric dipole moment