

УСКОРИТЕЛИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
ДЛЯ ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

УДК 621.384.6

ПРОХОЖДЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ  
В ГАРМОНИЧЕСКОМ ВЧ ПРОТОННОГО СИНХРОТРОНА У-70

© 2025 г. С. Д. Колокольчиков<sup>a, b, \*</sup>, Ю. В. Сеничев<sup>a, b</sup>, В. А. Калинин<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Институт ядерных исследований РАН, Москва, 117312 Россия

<sup>b</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Московская обл., 141701 Россия

<sup>c</sup>Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова Национального исследовательского центра  
“Курчатовский институт”, Протвино, Московская обл., 142281 Россия

\*E-mail: sergey.bell13@gmail.com

Поступила в редакцию 05.05.2024 г.

После доработки 24.06.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

В работе изучается прохождение критической энергии на протонном синхротроне У-70. Стабильность движения обеспечивается методом скачка критической энергии при неизменных значениях бетатронных частот. Проведено моделирование продольного движения с учетом высших порядков коэффициента уплотнения орбиты, различных импедансов и интенсивностей сгустка. Представлены экспериментальные данные сеанса.

**Ключевые слова:** критическая энергия, гармонический высокочастотный резонатор (ВЧ), продольная динамика, модуляция дисперсионной функции

**DOI:** 10.56304/S2079562925010087

## ВВЕДЕНИЕ

Прохождение критической энергии является актуальной задачей для протонного пучка в строящемся комплексе NICA (ОИЯИ г. Дубна). С целью изучения данной проблемы, исследована динамика продольного движения в окрестности критической энергии У-70 (НИЦ “Курчатовский институт” – ИФВЭ, г. Протвино).

Увеличение скорости прохождения критической энергии уменьшает влияние факторов, возмущающих фазовое движение. Метод скачка критической энергии применяется на многих установках CERN [1], BNL [2], в том числе реализован на У-70. Сдвиг критической энергии обеспечивается искажением дисперсионной функции за счет использования тонких квадрупольных линз [3].

Результаты данного исследования помогут осветить потенциальные последствия прохождения критической энергии и определить существенные параметры, влияющие на динамику фазового движения.

## УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Уравнения продольного движения описывают эволюцию частицы в фазовом пространстве относительно референсной [4]:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\eta h}{\beta^2 E_0} \Delta E, \\ \frac{d\Delta E}{dt} = \frac{Ze\omega_0}{A 2\pi} V [\sin(\phi_s - h\omega_0\tau) - \sin\phi_s], \quad (1)$$

где  $\tau$  – временное отклонение рассматриваемой частицы от референсной,  $\beta$  – относительная скорость,  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  – угловая частота и соответствующее время обращения,  $h$  – гармоническое число,  $V$  – амплитуда ВЧ,  $\phi_s$  – фаза равновесной частицы, коэффициент проскальзывания (slip-factor)  $\eta(\delta) = \eta_0 + \eta_1\delta + \dots$ ,  $\eta_0 = \alpha_0 - \frac{1}{\gamma_0^2}$ ,  $\eta_1 = \frac{3\beta_0^2}{2\gamma_0^2} + \alpha_1 - \alpha_0\eta_0$ .

В (1), если энергия пучка приближается к критической  $\gamma \rightarrow \gamma_{tr}$ , то  $\eta = \eta_0 \rightarrow 0$ , правая часть уравнения обращается в ноль. Возникает необходимость обеспечения стабильности при прохождении критической энергии.

## АДИАБАТИЧНОСТЬ И НЕЛИНЕЙНОСТЬ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Вдали от критической энергии частота синхротронных колебаний слабо меняется со временем, движение адиабатично. Вблизи критической энергии нарушается условие адиабатичности синхро-

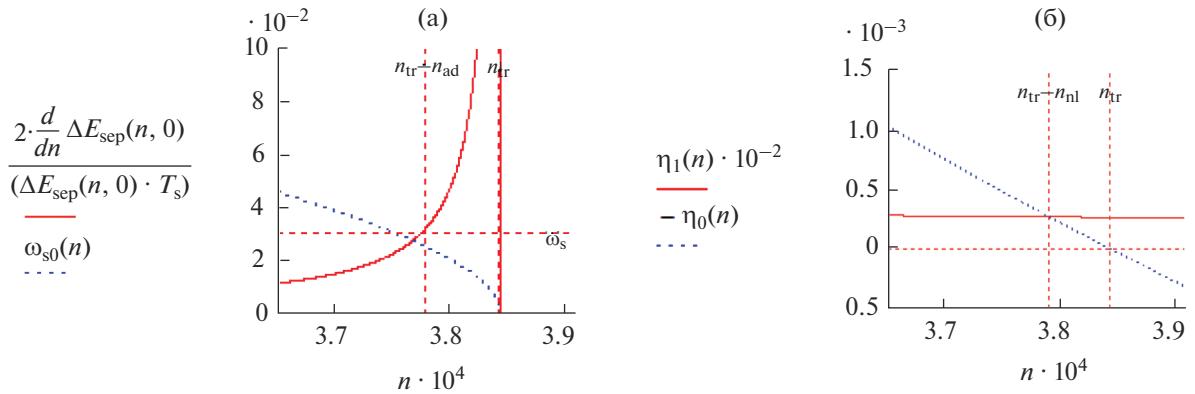


Рис. 1. (а) Классическая синхротронная частота и темп изменения огибающей сепаратрисы в окрестности критической энергии от номера оборота; (б) изменение первого и второго порядка коэффициента проскальзывания  $\eta_0$ ,  $\eta_l\delta$  в окрестности критической энергии от номера оборота.

tronного движения. Характерное время адиабатичности можно оценить, сравнивая синхротронную частоту с темпом изменения удерживающей сепаратрисы (рис. 1а) [5]:

$$\tau_{ad} = \left( \frac{\pi \beta^2 m c^2 \gamma_{tr}^4}{\dot{\gamma}^2 h e V |\cos \phi_s|} \right)^{1/3}, \quad (2)$$

где  $\gamma_{tr}$  – Лоренц-фактор, соответствующий критической энергии,  $\dot{\gamma}$  – темп изменения энергии. Нелинейность продольного движения проявляется, когда  $\eta_l\delta$  сравнимо с  $\eta_0$ , характерное время (рис. 1б):

$$\tau_{nl} = \frac{\eta_l \hat{\delta}}{2 \dot{\gamma}^2 \gamma_{tr}^3} = \gamma_{tr} \frac{3/2 \beta^2 + \gamma_{tr}^2 \alpha_l}{2 \dot{\gamma}}, \quad (3)$$

где  $\hat{\delta} \approx 10^{-2} - 10^{-3}$  – абсолютное значение максимального отклонения импульса вблизи критической энергии,  $\alpha_l$  – второй порядок коэффициента уплотнения орбиты. Для регулярной ФОДО структуры У-70 с скомпенсированной натуральной хроматичностью, получено  $\alpha_l \approx 0.01$  [6].

Кроме того, из ур. (1) следует условие стабильности синхротронных колебаний

$$\eta_0 \cos \phi_s < 0. \quad (4)$$

Видно, что для продольного согласования при прохождении критической энергии также должна быть сдвинута фаза  $\phi_s$  ускоряющего поля ВЧ на  $\pi - 2\phi_s$ .

Оценки для У-70, приведенные в табл. 1, отражают тот факт, что время адиабатичности (2) может быть сравнимо со временем нелинейности (3)  $\tau_{ad} \sim \tau_{nl}$ . При приближении энергии к критической, продольная длина пучка уменьшается, а разброс по импульсам увеличивается. На рис. 2 приведены результаты моделирования прохождения кри-

тической энергии при ускорении от 7.0 до 13.0 ГэВ для  $\eta = \eta_0$  и  $\eta = \eta_0 + \eta_l\delta$  в различных моделях BLonD [7]. Влияние второго порядка коэффициента проскальзывания увеличивает продольный эмиттанс.

## ВЛИЯНИЕ ИНДУКТИВНОГО ИМПЕДАНСА

На продольную динамику также оказывает влияние элементов ускорителя. Импеданс описывает взаимодействие пучка с элементами структуры ускорителя. Особенно важным для изучения динамики при прохождении критической энергии является продольный импеданс  $Z_{||}(\omega)$ . Аналитический расчет полного импеданса кольца является трудной задачей и в данной работе ограничен его индуктивной компонентой  $Z_n/n = \pm i \cdot \text{const}$ . Отрицательная индуктивность соответствует импедансу гладкой камеры, а положительная – продольному импедансу связи пикап-электродов, кикер-магнитов и сильфонов [3].

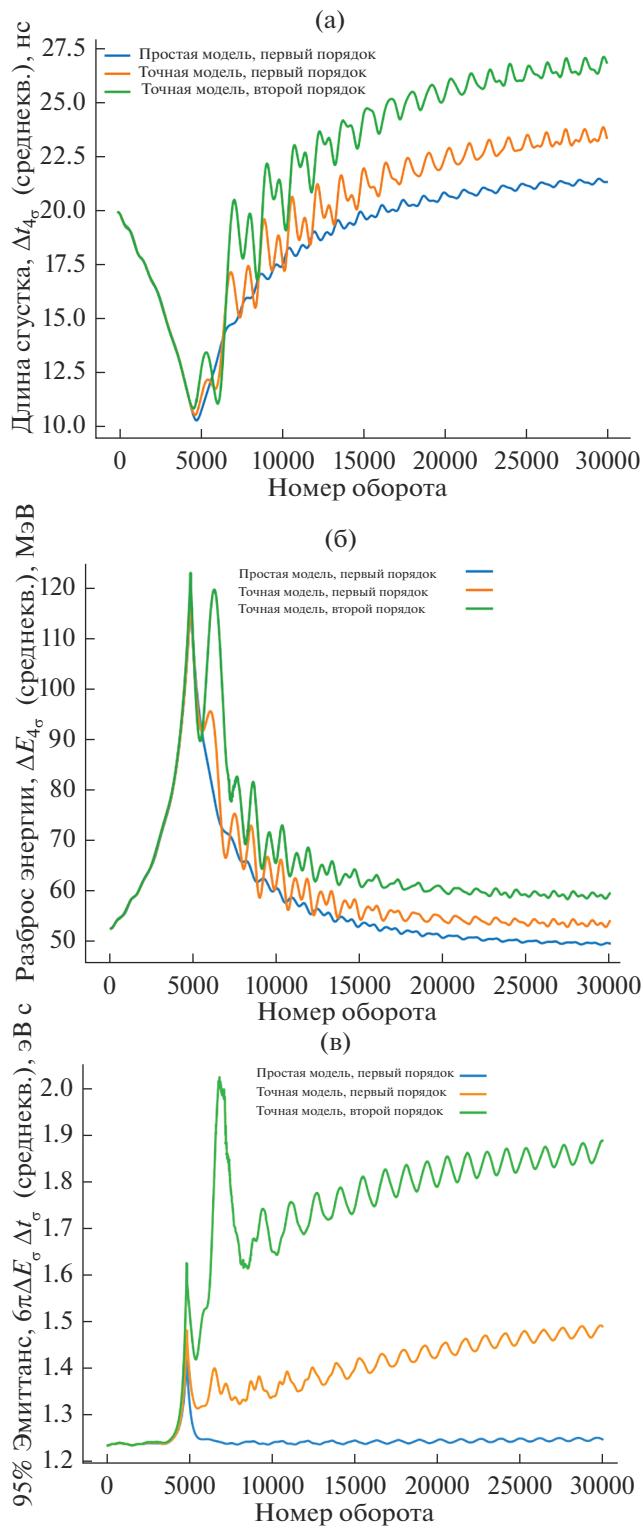
На сеансе для У-70 наблюдалась интенсивность в импульсе порядка  $N_{tot} = 4 \cdot 10^{12}$  pp (particles per period), соответственно, в сгустке – порядка  $N_{beam} = 4 \cdot 10^{11}$  pp (particles per beam). Моделирование продольной динамики при изменении энергии от 7 до 9 ГэВ показывает, что при малой интенсивности  $N_{beam} = 4 \cdot 10^{11}$  pp как для отрицательного, так и для положительного значений рассматриваемого импеданса пучок сохраняет стабильность. Для больших интенсивностей  $N_{beam} = 1 \cdot 10^{12}$  pp наблюдается существенное изменение симметрии фазового объема и увеличение продольного эмиттанса (рис. 3, табл. 2). В соответствии с экспериментальными данными начальное значение длины сгустка  $\tau_L = 4t_0 \approx 20$  нс для

Таблица 1. Основные параметры кольца и ВЧ для У-70

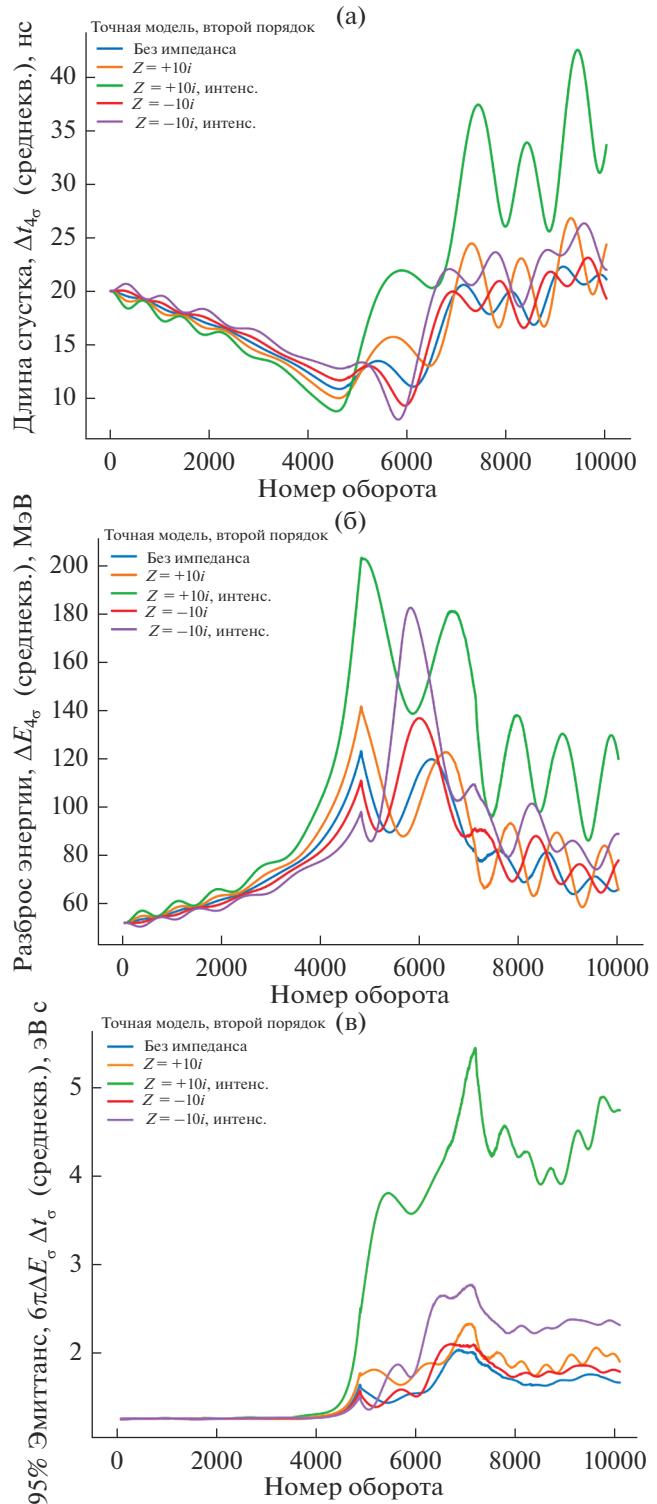
Длина $L$ , м	1483.699
Коэффициент расширения орбиты $\alpha_0$	0.011120
Коэффициент расширения орбиты $\alpha_1$	0.01
Критическая энергия, ГэВ	7.957
Лоренц-фактор $\gamma_{tr}$	7.48
Максимальная интенсивность в сеансе, ррр	$4 \cdot 10^{12}$
Ускоряющая фаза $\sin(\phi_s)$	1/2
Время адиабатичности $\tau_{ad}$ , мс	3.218
Время нелинейности $\tau_{nl}$ , мс	2.646
Гармоническое число	30
Амплитуда ускоряющих станций, кВ	10
Количество ускоряющих станций	40
Темп ускорения $\dot{\gamma}$ , $\text{с}^{-1}$	42.7

Таблица 2. Результаты численного моделирования прохождения критической энергии с учётом влияния различных импедансов для различных интенсивностей

Параметры моделирования	95% фазовый объем	Сохранение пучка (9 ГэВ)	Особенности
$\alpha_l = 0$ , simple Без импеданса	1.23	100%	Простая модель Рост эмиттанса отсутствует
$\alpha_l = 0$ , exact Без импеданса	1.4	99.65%	Точная модель, нелинейность MCF отсутствует, влияние неадиабатичности, рост эмиттанса
$\alpha_l = 0.01$ , exact Без импеданса	1.8	99.65%	Влияние нелинейности MCF Рост эмиттанса в ~1.5 раза
$\alpha_l = 0.01$ , exact $Z_n/n = -i \cdot 10$ $N_{beam} = 4 \cdot 10^{11}$ ppb	1.8	99.65%	Уменьшение длины сгустка после $\gamma_{tr}$ , фокусирование после $\gamma_{tr}$ Рост эмиттанса
$\alpha_l = 0.01$ , exact $Z_n/n = +i \cdot 10$ $N_{beam} = 4 \cdot 10^{11}$ ppb	1.9	99.60%	Уменьшение длины сгустка до $\gamma_{tr}$ , раскачивание после $\gamma_{tr}$ Рост эмиттанса
$\alpha_l = 0.01$ , exact $Z_n/n = -i \cdot 10$ $N_{beam} = 1 \cdot 10^{12}$ ppb	2.3	99.60%	Существенное сжатие длины сгустка до $\gamma_{tr}$ , рост эмиттанса
$\alpha_l = 0.01$ , exact $Z_n/n = +i \cdot 10$ $N_{beam} = 1 \cdot 10^{12}$ ppb	4.1	98.60%	Увеличенная амплитуда квадрупольных колебаний, существенный рост эмиттанса



**Рис. 2.** Зависимость длины сгустка (а), разброса энергии внутри сгустка (б), продольного эмиттанса (в) от номера оборота в окрестности критической энергии при изменении энергии от 7 до 13 ГэВ для трех моделей без скачка и учета импеданса. Синяя — учет только первого порядка  $\eta = \eta_0$ , “simple” solver, оранжевая —  $\eta = \eta_0 + \eta_l \delta$ , “exact” solver, зеленая —  $\eta = \eta_0 + \eta_l \delta$ , “exact” solver.



**Рис. 3.** Зависимость длины сгустка (а), разброса энергии внутри сгустка (б), продольного эмиттанса (в) от номера оборота в окрестности критической энергии при изменении энергии от 7 до 9 ГэВ без скачка, с учетом различного вида импеданса и интенсивностей.

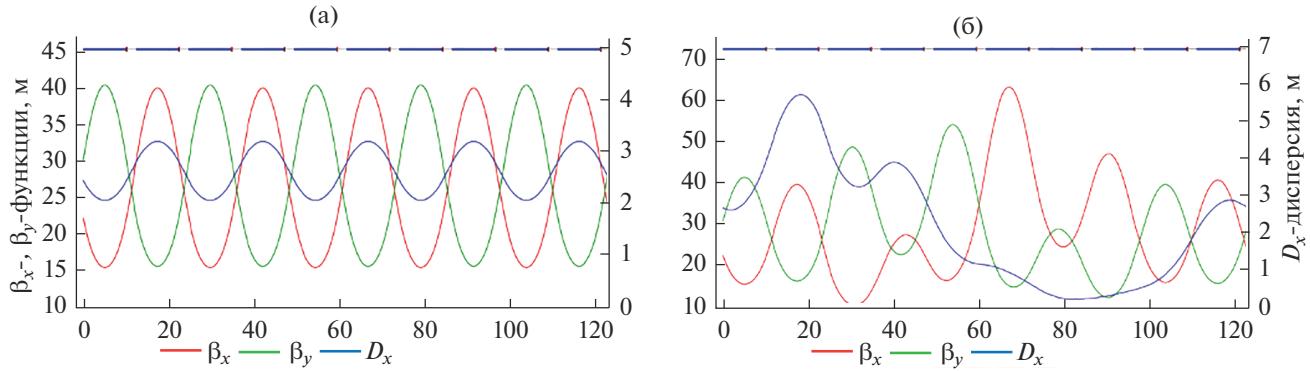


Рис. 4. Твисс-параметры  $\beta_x, \beta_y, D_x$  для суперпериода У-70: (а) регулярная структура; (б) структура с модулированной дисперсией.

$E_0 = 7$  ГэВ. Для гауссова распределения  $\Delta E_0 = 4E_\sigma = 52.7$  МэВ,  $\epsilon_{095\%} = 1.23$  эВ с.

### СКАЧОК КРИТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Для сохранения стабильности продольного движения, продольный эмиттанс не должен расти при прохождении критической энергии. Для этой цели на У-70 используется метод скачка критической энергии [8]. Возрастает скорость прохождения критической энергии, при этом сам темп ускорения не меняется. Это достигается изменением параметров ускорителя, при котором изменяется  $\alpha_0$ . В общем случае, коэффициент расширения орбиты определяется как интеграл:

$$\alpha = \frac{1}{C_0} \int_0^C \frac{D(s)}{\rho(s)} ds,$$

где  $D(s)$  – дисперсионная функция,  $\rho(s)$  – кривизна орбиты. Изменение коэффициента расширения орбиты возможно при модулировании дисперсионной функции, так как  $\rho(s)$  остается неизменной. Такая модуляция в синхротроне У-70 осуществляется квадрупольями во 2-ом и 8-ом блоках каждого суперпериода [9]. На рис. 4 изображены параметры Твисса для одного суперпериода, состоящего из 10 магнитных блоков с совмещенной функцией

как для регулярной структуры У-70, так и структуры с искаженной дисперсионной функцией [10].

Квадруполи расположены через полпериода  $\Delta v_{x,y} = 0.5 \times 0.5$  и имеют противоположные полярности. При такой модуляции дисперсии не происходит сдвига рабочей точки. В табл. 3 приведены значения рабочей точки в ходе процедуры поднятия критической энергии и скачка. Таким образом, поднятие критической энергии на переднем фронте происходит на  $\Delta \gamma_{tr} = 0.9$  за 36 мс, а сам скачок – за 1 мс на заднем фронте. Принципиальная схема процедуры, а также соответствующее изменение первого порядка коэффициента скольжения приведены на рис. 5. Процедура скачка на сеансе У-70 приведена на рис. 6а, продольная линейная плотность сгустка относительно фазы ВЧ в момент скачка отражена на рис. 6б.

Данные моделирования продольного движения соответствуют изменению длины сгустка в ходе ускорительного цикла на сеансе У-70 (рис. 7). Результаты моделирования продольного движения (рис. 8, табл. 4) показаны для разных моделей при ускорении от 6.9–12.9 ГэВ [9] для скачка критической энергии. А также для скачка с учетом импедансов вида  $Z_n/n = \pm i \cdot \text{const}$  и разных интенсивностей при ускорении 6.9–8.9 ГэВ (рис. 9). Началь-

Таблица 3. Изменение рабочей точки в процессе процедуры скачка критической энергии на У-70

Время от момента инжекции, мс	Рабочая точка $v_{x,y}$	Относительно скачка
290	$9.921 \times 9.842$	До процедуры
295	$9.917 \times 9.808$	Начало процедуры
310	$9.849 \times 9.787$	Середина процедуры
326	$9.780 \times 9.771$	Момент скачка
330	$9.902 \times 9.809$	После

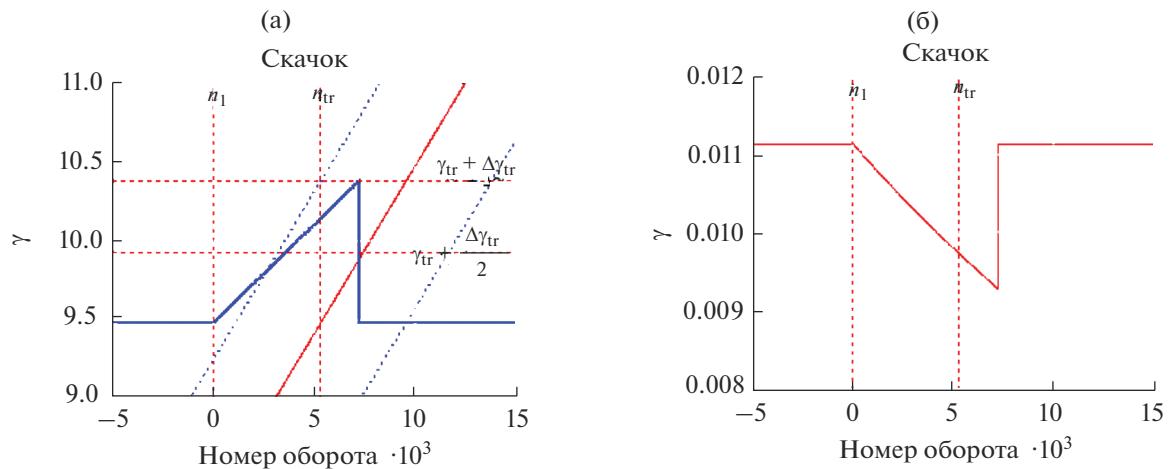


Рис. 5. (а) Поднятие критической энергии при процедуре скачка; (б) соответствующее изменение первого порядка коэффициента скольжения  $\eta_0$ .

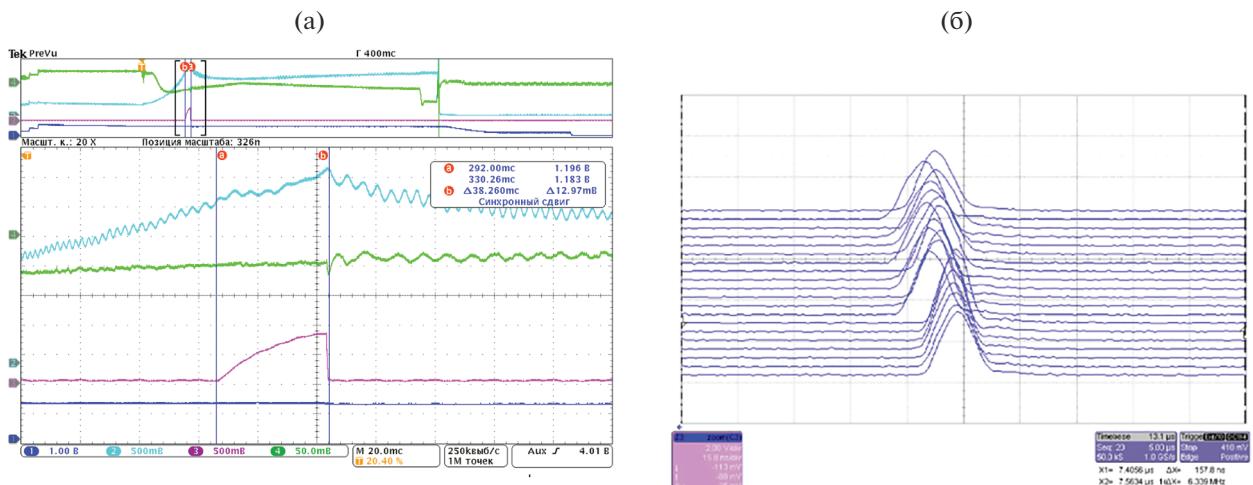


Рис. 6. (а) Скачок критической энергии на сеансе У-70. Зеленая линия – сигнал с фазового датчика, фиолетовая – градиент в обмотках дополнительных квадрупольей, голубая – сигнал с пикового детектора. (б) Продольная линейная плотность сгустка относительно фазы ВЧ в момент скачка.

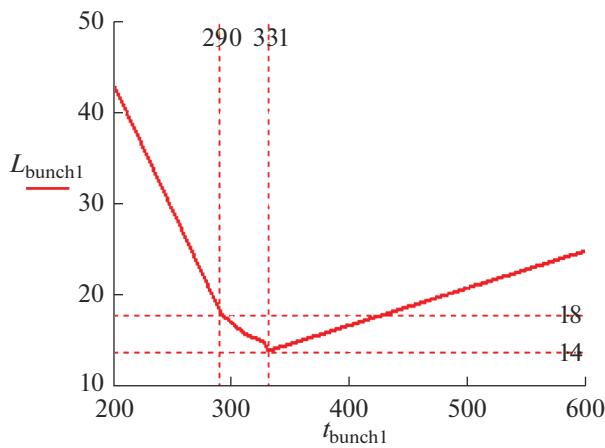


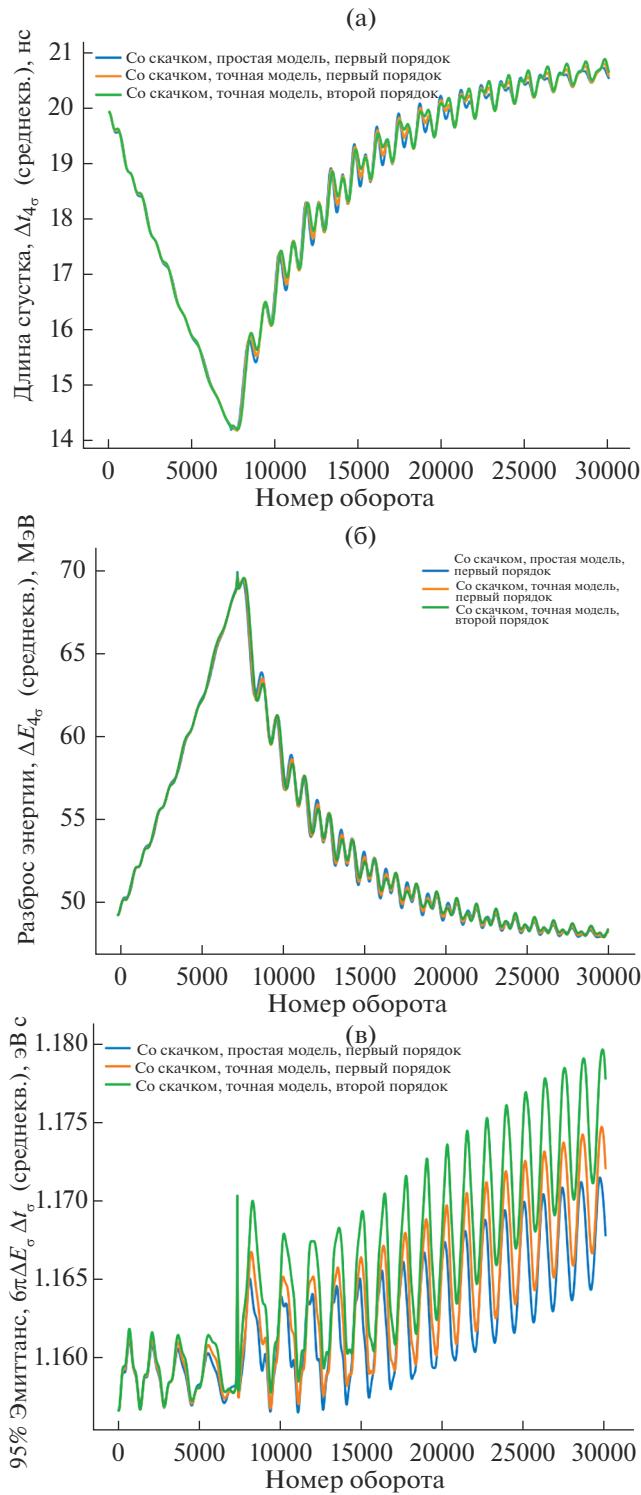
Рис. 7. Изменение длины сгустка в ходе ускорительного цикла на сеансе У-70.

ные значения  $\tau_L = 4t_\sigma \simeq 20$  нс при  $E_0 = 6.9$  ГэВ,  $\Delta E_0 = 4E_\sigma = 49.3$  МэВ,  $\epsilon_{095\%} = 1.16$  эВ с.

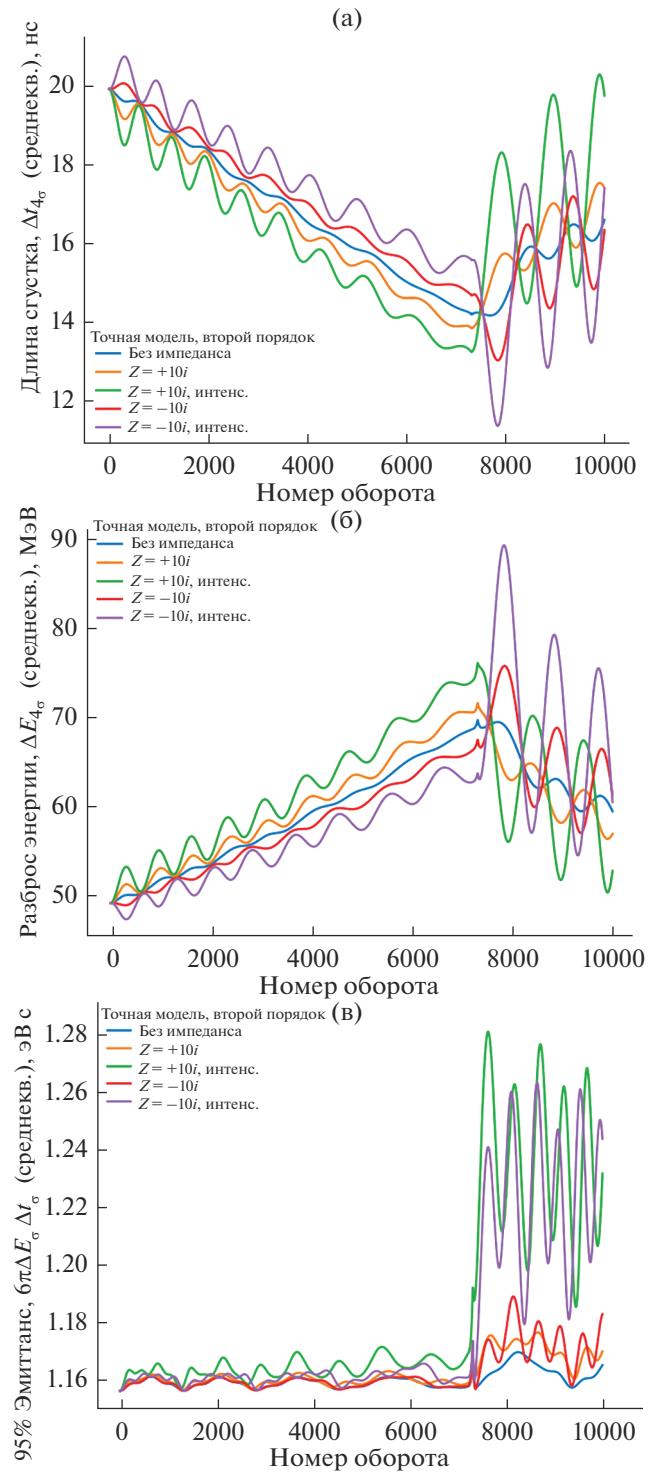
При сравнении двух рассмотренных способов прохождения критической энергии: без скачка критической энергии и со скачком, можно установить, что при скачке продольная длина сгустка сокращается меньше. Таким образом и рассмотренные импедансы меньше возмущают сгусток. Рост эмиттанса наблюдается только при рассмотрении интенсивного сгустка, где число частиц  $N_{beam} = 1 \cdot 10^{12}$  ppb.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прохождение критической энергии в гармоническом ВЧ как с использованием метода скачка,



**Рис. 8.** Зависимость длины сгустка (а), разброса энергии внутри сгустка (б), продольного эмиттанса (в) от номера оборота в окрестности критической энергии при изменении энергии от 6.9 до 12.9 ГэВ для трех моделей со скачком, без учета импеданса. Синяя – учит только первого порядка  $\eta = \eta_0$ , “simple” solver, оранжевая –  $\eta = \eta_0$ , “exact” solver, зеленая –  $\eta = \eta_0 + \eta_1 \delta$ , “exact” solver.



**Рис. 9.** Зависимость длины сгустка (а), разброса энергии внутри сгустка (б), продольного эмиттанса (в) от номера оборота в окрестности критической энергии при изменении энергии от 6.9 до 8.9 ГэВ со скачком, с учетом различного вида импеданса и интенсивностей.

**Таблица 4.** Результаты численного моделирования прохождения критической энергии скачком с учетом влияния различных импедансов для различных интенсивностей

Параметры моделирования	95% фазовый объем	Сохранение пучка (9 ГэВ)	Особенности
$\alpha_l = 0$ , simple Без импеданса	1.165	100%	Простая модель Рост эмиттанса отсутствует
$\alpha_l = 0$ , exact Без импеданса	1.167	100%	Точная модель Рост эмиттанса отсутствует
$\alpha_l = 0.01$ , exact Без импеданса	1.174	100%	Нелинейность отсутствует Рост эмиттанса отсутствует
$\alpha_l = 0.01$ , exact $Z_n/n = -i \cdot 10$ $N_{beam} = 4 \cdot 10^{11}$ ppb	1.17	100%	Уменьшение длины после скакка $\gamma_{tr}$
$\alpha_l = 0.01$ , exact $Z_n/n = +i \cdot 10$ $N_{beam} = 4 \cdot 10^{11}$ ppb	1.17	100%	Слабые квадрупольные колебания до скакка $\gamma_{tr}$
$\alpha_l = 0.01$ , exact $Z_n/n = -i \cdot 10$ $N_{beam} = 1 \cdot 10^{12}$ ppb	1.23	99%	Длина сгустка существенно сокращается, небольшой рост эмиттанса
$\alpha_l = 0.01$ , exact $Z_n/n = +i \cdot 10$ $N_{beam} = 1 \cdot 10^{12}$ ppb	1.23	99%	Большая амплитуда квадрупольных колебаний, небольшой рост эмиттанса

так и без него, было рассмотрено в сеансе на протонном синхротроне У-70. Проведено численное моделирование продольной динамики для различных импедансов и интенсивностей сгустков. Показано, что темп ускорения играет ключевую роль при прохождении критической энергии. Для его увеличения используют метод скачка критической энергии. Изменение критической энергии осуществляется при помощи модуляции дисперсионной функции, что позволяет контролировать продольный эмиттанс сгустка в момент прохождения критической энергии.

Изученная динамика продольного движения вблизи критической энергии представляет интерес для дальнейшего изучения на комплексе NICA.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность директору ИФВЭ С.В. Иванову за возможность участия в сеансе на синхротроне У-70, а также сотрудникам ОУК ИФВЭ В.А. Калинину, П.Т. Пашкову, А.Д. Ермолаеву за всестороннюю помощь в изучении рассматриваемой задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. Hardt W. // Proc. 9th Int. Conf. High Energy Accel. 1974. Stanford, CA, USA. P. 434.
2. Wei J. // Proc. EPAC92. 1992. V. 1. P. 643–645.
3. Пашков П.Т. // Измерение индуктивной компоненты продольного импеданса связи У-70 с помощью скачка критической энергии. Препринт № 2004-4. 2004. Протвино: ИФВЭ. <http://web.ihep.su/library/pubs/prep2004/ps/2004-04.pdf>.
4. Lee S.Y. Accelerator Physics (4th Ed.). 2018. Singapore: World Scientific. <https://doi.org/10.1142/11111>.
5. Ng K.Y. // Proc. U.S. Particle Accelerator School (US-PAS 2002). FERMILAB-FN-0713. 2002.
6. MADX. <https://mad.web.cern.ch/mad/>.
7. BLonD. <https://blond.web.cern.ch/>.
8. Пашков П.Т. Основы теории протонного синхротрона: Уч. пос. для студентов МГУ. 1999. Протвино: ИФВЭ.
9. Черный С.А. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1991. Т. 22 (5). С. 1067.
10. Lebedev V. OptiM code. Private communication. [www-bdnew.fnal.gov/pbar/organizationalchart/lebedev/OptiM/optim.htm](http://www-bdnew.fnal.gov/pbar/organizationalchart/lebedev/OptiM/optim.htm).

## Transition Energy Crossing in Harmonic RF at U-70 Proton Synchrotron

S. D. Kolokolchikov<sup>1, 2, \*</sup>, Yu. V. Senichev<sup>1, 2</sup>, and V. A. Kalinin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117312 Russia

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow obl., 141701 Russia

<sup>3</sup> Logunov Institute for High Energy Physics, National Research Centre “Kurchatov Institute”, Protvino, Moscow obl., 142281 Russia

\*e-mail: sergey.bell13@gmail.com

Received May 5, 2024; revised June 24, 2024; accepted July 1, 2024

**Abstract**—In this paper, the transition energy crossing on the proton synchrotron U-70 is studied. The stability of motion is provided by the method of transition energy jump at constant betatron tunes. The longitudinal motion is modeled taking into account the high orders of the momentum compaction factor, various impedances and beam intensities. The experimental data of the session are presented.

**Keywords:** transition energy, harmonic radiofrequency (RF) resonator, longitudinal dynamic, modulation of the dispersion function