

ЭНДЕМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В РАСШИРЕННОЙ SEIR МОДЕЛИ

© 2025 г. А. Р. Каримов^{a, b}, М. А. Соломатин^{a, *}

^aНациональный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409 Россия

^bОбъединенный институт высоких температур РАН, Москва, 125412 Россия

*E-mail: mis4455@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.05.2024 г.

После доработки 29.05.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

В работе обсуждается образование нестационарных, нелинейных состояний в расширенной SEIR модели распространения эпидемий для популяции постоянной численности в предположении равенства скорости выздоровевших и заболевших. Также считаются постоянными вероятности передачи инфекций, характерные времена развития болезни и выздоровления. Полученные аналитические соотношения используются для установления допустимой области управляющих параметров, обеспечивающих образование и существование неравновесных распределений, которые можно трактовать как латентную эпидемиологическую фазу.

Ключевые слова: SEIR модель, эпидемиологические константы, эндемическое равновесие

DOI: 10.56304/S2079562925020022

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе, в рамках стандартной SEIR модели распространения инфекционных болезней [1–5], обсуждается установление динамического равновесия между заболевшими и выздоровевшими в популяции постоянной численности, когда следует учитывать скрытую фазу болезни, во время которой человек уже является носителем вируса, но еще не стал больным. По сути, такое динамическое равновесие по медицинской классификации представляет собой разновидность эндемии [6], источником и средой, для которой является рассматриваемая популяция. Типичным примером такой болезни является туберкулез [7, 8]. Существование данной промежуточной фазы во многом определяет развитие или затухание заболевания во всей популяции.

Однако, реализация возможного сценария эпидемии аналогично химической кинетике задается соотношением между константами скоростей соответствующих эпидемиологических переходов, что является ключевым моментом для развития эпидемий. Очевидно, что данные управляющие параметры зависят как от медико-биологических особенностей отдельных людей, так и физических и социальных условий, в которых находится популяция в целом [9, 10]. Учитывая сложность такой задачи, в большинстве исследований эпидемиологические константы полагаются постоянными, их величина находится из анализа соответствующих эмпирических данных для конкрет-

ного случая [2, 3, 11]. По-видимому, именно этот момент и ограничивает прогностическую ценность подобных моделей.

Поэтому было бы интересно подойти к теоретическому определению эпидемиологических констант, исходя из некоторых общих физических и эпидемиологических идей. Так, формальная близость уравнений SEIR модели и химической кинетики наводит на мысль использовать для этого концепцию квазиравновесия, развитую для сложных реакций, характеризующихся разными временами установления равновесия [12]. Тем более, что вблизи квазиравновесных состояний исчезает влияние многих факторов, проявляющихся вдали от равновесия, и можно связать величины соответствующих констант с соответствующими равновесными параметрами [13]. Это является второй причиной интереса к исследованию возможных эндемических равновесий в рамках используемой модели.

2. SEIR модель

Используя стандартную SEIR модель [1–3], рассмотрим динамику инфекционных заболеваний в замкнутой популяции постоянной численности N , т.е. для простоты мы не будем учитывать процессы рождения, смертности и миграции. Также мы пренебрегаем группой, обладающих либо врожденным иммунитетом, либо приобретенным после болезни. Поэтому выздоровевшие могут повторно заразиться. Кроме того, будет прово-

даться разделению вероятности заражения от людей, находящихся в стадии болезни, и от тех, кто только что заразился. В данном приближении основные уравнения SEIR модели, записанные относительно удельных фракций больных и здоровых, сведутся к

$$\frac{dS}{dt} = -(\beta_I SI + \beta_E SE) + \gamma I + \alpha E, \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_I SI + \beta_E SE - (\delta + \alpha) E, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I, \quad (3)$$

где S – доля неинфицированных в популяции в текущий момент времени t , E – доля уже инфицированных, но еще не заболевших (группа латентных больных), I – доля инфицированных, являющихся больными в данный момент времени t , β_I описывает скорость передачи вируса от больных к здоровым людям, а β_E – характеризует передачу заболевания от инфицированных, γ – константа, характеризующая скорость перехода из группы больных в число здоровых, α – константа перехода из латентной группы в разряд здоровых, δ – константа скорости перехода из инфицированных в группу больных.

Разделение констант скоростей передачи инфекции на две категории β_E и β_I объясняется тем, что процесс передачи инфекции имеет разную физическую природу у латентных больных, которые часто контактируют с другими людьми при перемещениях, по сравнению с людьми в активной форме болезни, у которых контакты ограничены близким кругом людей.

Также отметим, что уравнения (1)–(3) автоматически обеспечивают постоянство популяции:

$$S + E + I = 1. \quad (4)$$

Будем считать, что в популяции изначально содержится некоторое количество инфицированных и больных. Поэтому система уравнений (1)–(3) рассматривается при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} S(t=0) = S_0 > 0, \quad E(t=0) = E_0 \geq 0, \\ I(t=0) = I_0 \geq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

обеспечивающих (4).

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛНОГО ЭНДЕМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Начнем с наиболее простого варианта $\beta_I = 0$, что физически соответствует распространению инфекции только категорией E , когда все больные изолированы. Такая ситуация является типичной для городской среды, где есть большое количество

транспортных потоков и социальных контактов. В этом случае, исключив с помощью соотношения (4) из уравнения (2) величину S , получим

$$\frac{dE}{dt} = E[\beta_E(1 - I - E) - \delta - \alpha] \quad (6)$$

описывающее вместе с (3) полную динамику системы в данном пределе.

Уравнения (3), (6) имеет нетривиальное квазиравновесное состояние, определяемое соотношениями:

$$\beta_E(1 - I_* - E_*) - \delta - \alpha = 0, \quad \delta E_* - \gamma I_* = 0, \quad (7)$$

из которых находим

$$E_* = \frac{\gamma\beta - \alpha - \delta}{\beta\gamma + \delta}, \quad I_* = \frac{\delta\beta - \alpha - \delta}{\beta\gamma + \delta}. \quad (8)$$

При этом согласно (4) доля здоровых составляет

$$S_* = \frac{\alpha + \delta}{\beta}. \quad (9)$$

По сути соотношения (8) и (9) описывают состояние эндемии, когда в популяции при определенных условиях достаточно долгое время существует некоторое заболевание, но ни развития, ни уничтожения болезни не происходит. Как видно из (8), такое равновесие достигается при

$$\beta > \alpha + \delta, \quad (10)$$

что является необходимым ограничением на эпидемиологические константы для достижения эндемического равновесия.

Покажем, что состояние (8) является асимптотически устойчивым, построив соответствующую функцию Ляпунова для системы (6) и (3). Для этого, используя (7), перепишем (6) и (3) в кососимметричной форме:

$$\frac{dE}{dt} = E[\beta_E(E_* - E) - \beta_E(I_* - I)], \quad (11)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta(E - E_*) - \gamma(I - I_*). \quad (12)$$

Для системы (11)–(12) мы можем определить функцию

$$V(I, E) = E - E_* \ln E + a(I - I_*)^2, \quad (13)$$

где $a = \beta/2\delta > 0$, непрерывную для всех $I, E > 0$ и имеющую частные производные

$$\frac{\partial V}{\partial E} = \frac{E - E_*}{E}, \quad \frac{\partial V}{\partial I} = 2a(I - I_*). \quad (14)$$

Производная от $V(I, E)$ вдоль траекторий системы (11)–(12) запишется как

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dI} \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dE} \frac{dE}{dt}. \quad (15)$$

Тогда подставив (11), (12) и (14) в (15), получим

$$\frac{dV}{dt} = -\beta_E (E_* - E)^2 - \frac{\beta_E \gamma}{\delta} (I_* - I)^2. \quad (16)$$

Как видно из (15), $dV/dt < 0$ за исключением равновесной точки (I_*, E_*) . Кроме того, $V(I, E) \rightarrow \infty$ при $E \rightarrow \infty$ или $E \rightarrow 0$. Следовательно, функция (17) является функцией Ляпунова для системы (11)–(12) и по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости [14] эндемическое состояние (I_*, E_*) , описываемое соотношениями (8), асимптотически устойчиво в области $I, E > 0$.

Таким образом, при наличии начальной зараженности в популяции для любых начальных условий для выбранного соотношения между эпидемиологическими константами, описывающими передачу инфекции ($\beta_I = 0$ и $\beta_E \neq 0$), в системе будет реализовываться состояние эндемического равновесия.

4. ЧАСТИЧНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Теперь рассмотрим возможность реализации в популяции эндемического равновесия за счет установления частичного равновесия между заболевшими и инфицированными при $\beta_I \neq 0$ в пределе $\beta_I = \beta_E = \beta = \text{const}$. В этом случае уравнения (1) и (3) трансформируются в

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(I + E) + \gamma I + \alpha E, \quad (17)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta S(I + E) - (\delta + \alpha) E, \quad (18)$$

а условие нулевой скорости заболеваемости

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad (19)$$

позволяет непосредственно найти соотношение между заболевшими и инфицированными:

$$I = \frac{\delta}{\gamma} E. \quad (20)$$

Подставив соотношения (20) в уравнения (17) и (18), получим

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{\gamma} (\delta + \gamma) ES + (\delta + \alpha) E, \quad (21)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta}{\gamma} (\delta + \gamma) ES - (\delta + \alpha) E. \quad (22)$$

Однако в отличие от исходной системы, для уравнений (21) и (22) условие сохранения (4) редуцируется в

$$S + E = \sigma, \quad (23)$$

здесь константа σ определяется начальными условиями:

$$\sigma = S_0 + E_0 < 1. \quad (24)$$

Используем (24) в (21), чтобы исключить из рассмотрения E ; в результате получим

$$\frac{dS}{dt} = (\sigma - S) \left[(\delta + \alpha) - \frac{\beta(\delta + \gamma)}{\gamma} S \right]. \quad (25)$$

Решение данного уравнения при эпидемиологических константах, независимых от времени, есть

$$S(t) = \sigma \frac{g(t) - \frac{\delta + \alpha}{\sigma}}{g(t) - \frac{\beta(\delta + \gamma)}{\gamma}}, \quad (26)$$

здесь

$$g(t) = A \exp(t/\tau), \quad (27)$$

где константы A и τ определяются соотношениями

$$A = \frac{\beta(\delta + \gamma) S_0 - \frac{\gamma\delta + \alpha}{\beta\delta + \gamma}}{\gamma S_0 - \sigma} \quad (28)$$

и

$$\tau = \frac{1}{\frac{\beta(\delta + \gamma)\gamma\delta + \alpha}{\beta\delta + \gamma} - \sigma}. \quad (29)$$

Из соотношения (23) с помощью (26) получаем

$$E(t) = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta(\gamma - \sigma\beta) + \gamma(\alpha - \sigma\beta)}{g(t) - \frac{\beta(\delta + \gamma)}{\gamma}}. \quad (30)$$

Зависимости (26) и (30) будут иметь физический смысл, если выполняются условия

$$0 \leq S(t) < \infty, \quad 0 \leq E(t) < \infty, \quad (31)$$

что накладывает определенные ограничения на эпидемиологические константы и начальные условия, определяющие величину и знак A и τ , которые определяют существование требуемого решения.

Действительно, в силу (24) знаменатель в (28) всегда отрицателен, а значит при

$$S_0 > \frac{\gamma\delta + \alpha}{\beta\delta + \gamma}, \quad (32)$$

всегда получаем $A < 0$. При этом знаменатель в выражении (29) всегда отрицателен, а функция $g(t) < 0$ и монотонно возрастает на отрезке $A \leq g(t) \leq 0$. В данном случае также отрицателен знаменатель в формуле (30), а значит для $E(t) > 0$ необходимо, чтобы числитель этого соотношения был отрицателен, т.е. удовлетворялось неравенство

$$\frac{\gamma\delta + \alpha}{\beta\delta + \gamma} < \sigma, \quad (33)$$

что выполняется при соблюдении условия (32) и соотношения (24). Как видно из (26), также для данной $g(t)$ остается положительной величина $S(t)$. Таким образом, неравенство (32) задает допустимый диапазон эпидемиологических констант и начального значения S_0 , при которых в популяции достигается эндемическое равновесие.

Для наглядности перепишем соотношение (32) в случае $\alpha \approx \gamma$ через репродуктивное число $R_0 = \beta/\gamma$:

$$S_0 R_0 > 1. \quad (34)$$

Данное неравенство показывает, при каком соотношении между начальной зараженностью $1 - S_0$ и средним число зараженных одним инфицированным R_0 , можно ожидать установления эндемического равновесия.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе стандартная SEIR модель распространения эпидемий была модифицирована, чтобы раздельно учесть заражение больными и инфицированными вместе с латентными больными (это часть популяции обозначена, как E). В рамках этой модели обсуждался вопрос о реализации эндемического равновесия в популяции постоянной численности. В данном случае под эндемическим равновесием понимается существование в популяции некоторого постоянного числа заболевших и инфицированных. Такая ситуация может возникнуть 1) либо как нетривиальное, стационарное распределение [см. соотношения (7) и (8)], 2) либо при установлении баланса между заболевшими и выздоровевшими, когда следует учитывать скрытую фазу болезни, во время которой человек уже является носителем вируса, но еще не стал больным [см. соотношение (19)].

В первом варианте при $\beta_I = 0$ и выполнении условия (11) при любой ненулевой начальной зараженности в популяции будет достигаться эндемическое равновесие. Совершенно другая ситуация складывается во втором случае, где реализация данного равновесия происходит только при определенном соотношении между эпидемиологическими константами и начальной зараженностью [см. соотношения (33) и (34)]. По-видимому, именно во втором варианте возможен переход от эндемии к эпидемии при определенном изменении эпидемиологических констант.

Поэтому полученные соотношения (11) и (33) следует трактовать как необходимые условия для существования эндемического равновесия в популяции постоянной численности. Другими словами говоря, именно в диапазоне, задаваемом этими условиями, следует определять значения основных эпидемиологических констант, поскольку рассмотренные частные случаи являются соответствующими предельными равновесными вариантами, проявляются, например, факторы, обусловленные перемещени-

ем людей, и относительно слабо влияют социальные контакты на распространение инфекции. Отметим, что такой же подход к определению констант скоростей сложных реакций реализован химической кинетике [12].

Тем не менее, следует еще раз подчеркнуть, что рассмотренные варианты формирования эндемического равновесия относятся к частным случаям системы (1)–(3). Более того, частичное равновесие было исследовано в приближении постоянных эпидемиологических констант. Все это, с одной стороны, указывает на ограниченную полезность полученных результатов, а с другой стороны, данные точные аналитические зависимости указывают на возможные механизмы перехода от эндемии к эпидемии и обратно, с включением в модель физико-химических характеристик выдыхаемого воздуха [15, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. Brauer F., Castillo-Chavez C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. 2012. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1686-9>
2. Li M.Y., Graef J.R., Wang L., Karsai J. // *Math. Biosci.* 1999. V. 160 (2). P. 191–213.
3. Hethcote H.W. // *SIAM Rev.* 2000. V. 42 (4). P. 599–653.
4. He S., Peng Y., Sun K. // *Nonlinear Dyn.* 2020. V. 101. P. 1667–1680.
5. Milgroom M.G. *Biology of Infectious Disease: from Molecules to Ecosystems*. 2023. Cham: Springer. P. 253–268.
6. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. *Динамические системы и модели биологии*. 2010. Москва: Физматлит.
7. Авилов К.К., Романюха А.А. // *Матем. биология и биоинформ.* 2007. Т. 2 (2). С. 188–318.
8. Ojo M.M., Peter O.J., Goufo E.F.D., Panigoro H.S., and Oguntolu F.A. *Mathematical model for control of tuberculosis epidemiology* // *J. Appl. Math. Comp.* 2023. V. 69 (1). P. 69–87.
9. Igor D., Anastasiia P., Derevich I., Panova A. // *Proc. Int. Work-Conf. Bioinformatics and Biomedical Engineering*. 2023. Cham: Springer. P. 499–513.
10. Mwalili S., Kimathi M., Ojiambo V., Gathungu D., and Mbogo R. // *BMC Res. Notes*. 2020. V. 13 (1). P. 352.
11. Leonov A., Nagornov O., Tyufin S. // *Mathematics*. 2022. V. 11 (1). P. 167.
12. Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. *Курс химической кинетики: Уч. для хим. фак. ун-тов. 4-е изд., перераб. и доп.* 1984. Москва: Высш. шк.
13. Blumenfeld L.A. *Problems of Biological Physics*. 1981. Berlin: Springer.
14. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Уч. для вузов*. 1965. Москва: Наука.
15. Karimov A.R., Stenflo L., Yu M.Y. // *Phys. Scr.* 2022. V. 97 (8). P. 085007.
16. Каримов А.Р., Соломатин М.А. // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2024. Т. 13 (1). С. 30–39.

Endemic Equilibrium in the Extended SEIR Model

A. R. Karimov^{1, 2} and M. A. Solomatin^{1, *}

¹*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

²*Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences, Moscow, 127412 Russia*

**e-mail: mis4455@yandex.ru*

Received May 29, 2024; revise May 29, 2024; accepted June 11, 2024

Abstract—The paper discusses the formation of non-stationary, nonlinear states in an extended ER model of epidemic spread for a population of constant numbers under the assumption of equality of the rate of recovery and disease. The probabilities of transmission of infection, the characteristic times of disease development and recovery are also considered constant. The obtained analytical ratios are used to establish an acceptable range of control parameters that ensure the formation and existence of nonequilibrium distributions, which can be interpreted as a latent epidemiological phase.

Keywords: SEIR model, epidemiological constants, equilibria