

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 53.088.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ПЛАЗМЫ ИЗ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2022 г. Е. О. Баронова^а, *, В. В. Вихрев^а

^аНациональный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, 123182 Россия

*E-mail: baronova04@mail.ru

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.

После доработки 06.07.2021 г.

Принята к публикации 08.07.2021 г.

Представлена практическая реализация схемы сквозной полиномиальной интерполяции хордовой и радиальной функций ортогональными полиномами Чебышева. Приведены выражения для первых семи полиномов обеих функций, приведены оценки ошибок, имеющих место при определении радиальной функции.

Ключевые слова: интерферометрия импульсной плазмы, абелизация, интерполяция ортогональными полиномами

DOI: 10.56304/S2079562922010067

1. Введение. Для физических объектов, обладающих цилиндрической симметрией, связь между радиальным распределением плотности $\varepsilon(r)$ и хордовой функцией $\varphi(x)$, являющейся интегралом от $\varepsilon(r)$ вдоль хорды наблюдения, определена следующим образом:

$$\varphi(\xi) = Ab[\varepsilon(\rho)] = 2AR \int_{\xi}^1 \frac{\varepsilon(\rho)\rho d\rho}{(\rho^2 - \xi^2)^{1/2}} \quad (1)$$

$$\varepsilon(\rho) = Ab^{-1}[\varphi(\xi)] = \frac{-1}{\pi AR} \int_{\rho}^1 \frac{\varphi'(\xi)d\xi}{(\xi^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad (2)$$

в которых A – константа, $\rho = r/R$, $\xi = x/R$ – относительные радиус и хорда; $\varepsilon(1) \equiv 0$, $\varphi(1) \equiv 0$. Обычно $\varepsilon(r)$ вычисляется по измеренным значениям (ξ_i, φ_i) при помощи выражения (2). В данной работе предлагается вычислительная схема, основанная на сквозной полиномиальной интерполяции функций $\varepsilon(\rho)$ и $\varphi(\xi)$, и применимая для обработки данных, полученных как с использованием классических, так и сдвиговых интерферометров. При этом $\varphi(\xi)$ определяет параметры конкретной интерференционной полосы, а $\varepsilon(r)$ – искомое радиальное распределение плотности плазмы. Предложенная схема, основанная на сквозной полиномиальной интерполяции функций $\varepsilon(\rho)$ и $\varphi(\xi)$, позволяет избежать ошибок в определении $\varepsilon(r)$, связанных с использованием в формуле (2) произ-

водной хордовой функции $\varphi(x)$. Описанный метод позволяет оценить ошибки определения радиальной функции.

2. Схема интерполяции. Предположим, что радиальная функция допускает степенное приближение

$$\varepsilon(\rho) = (1 - \rho^2) \sum_{k=0}^m a_{2k} \rho^{2k}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) приводит к выражению для хордовой функции

$$\varphi(\xi) = 2AR(1 - \xi^2)^{3/2} \sum_{k=0}^m b_{2k} \xi^{2k}, \quad (4)$$

причем коэффициенты a_{2k} и b_{2k} связаны между собой соотношениями, не зависящими от конкретных значений самих коэффициентов. Таким образом, найдя приближение (4) и, затем выразив a_{2k} через b_{2k} , мы получаем решение в виде (3).

Для наиболее гладкого представления функций выбираем ортогональные полиномы Чебышева. Преобразуем правую часть (4) следующим образом:

$$\varphi(\xi) = 2AR(1 - \xi^2)^{3/2} \sum_i b_{2i} \xi^{2i} \equiv \sum_i c_{2i} S_{2i}(\xi) \quad (5)$$

здесь S_{2i} – система четных ортогональных функций (рис. 1). Общие формулы для функций $S_{2i}(\xi)$ и нормировочных коэффициентов K_{2i} таковы ($k = 0, 1, \dots$):

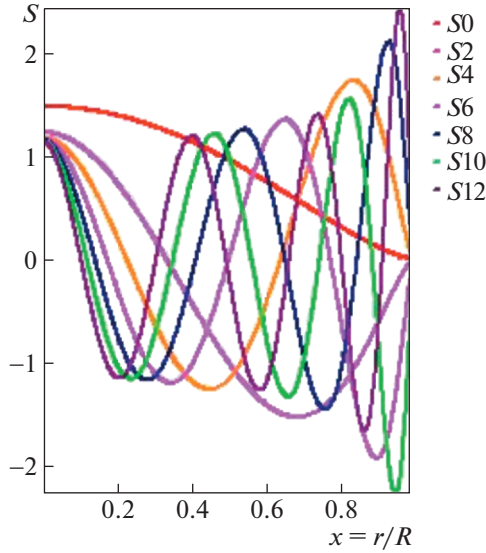


Рис. 1. Семь четных хордовых функций.

$$S_{2m}(\xi) = K_{2m} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \times \frac{(2m+2k+5)!}{2^{2k-1} k!(k+3)!(m-k)!(m+k+2)!} \times (1-\xi^2)^{k+\frac{3}{2}}, \quad (6)$$

$$K_{2m} = \left[\frac{256(4m+5)!}{(m)!(m+3)!(2m+2)!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \times \frac{[(m+k+3)!]^2 (2m+2k+5)!}{k!(k+3)!(m-k)!(2m+2k+7)!(m+k+2)!} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь m -ные приближения хордовой функции $\varphi(\xi)$ принимают вид:

$$\varphi_m(\xi) = \sum_{k=0}^m c_{2k} S_{2k}(\xi), \quad (7)$$

$$c_{2k} = \int_0^1 \varphi(\xi) S_{2k}(\xi) d\xi.$$

Второе уравнение в (7) является основным при расчете коэффициентов радиальной функции (а, следовательно, и самой радиальной функции). Второе уравнение в (7) получается из первого умножением обеих его частей на S_{2k} и последующим интегрированием обеих частей, где в правой части в силу условия ортогональности в процессе суммирования по k пропадают все члены типа $S_{2k} S_{2i}$ при $i \neq k$. Подставляя $\varphi(\xi)$ в (2), получаем соответствующее решение для радиальной функции:

$$\varepsilon(\rho) = \frac{1}{2AR} \sum_{k=0}^m c_{2k} P_{2k}(\rho), \quad (8)$$

в которой функции $P_{2k}(\rho)$ есть:

$$P_{2m}(\rho) = K_{2m} \times \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m+k} (2k+3)(2k+1)!(2m+2k+5)!}{2^{4k} (k!)^2 (k+1)!(k+3)!(m-k)!(m+k+2)!} \times (1-\rho^2)^{k+1}$$

$$P_0(\rho) = L_0(1-\rho^2),$$

$$P_2(\rho) = L_2(1-\rho^2)(13-45\rho^2),$$

$$P_4(\rho) = L_4(1-\rho^2)(65-11\rho^2(62-91\rho^2)),$$

$$P_6(\rho) = L_6(1-\rho^2)(389-195\rho^2 \times (37-7\rho^2(19-17\rho^2))),$$

$$P_8(\rho) = L_8(1-\rho^2)(943-3\rho^2(9252-119\rho^2 \times (482-19\rho^2(52-33\rho^2)))),$$

$$P_{10}(\rho) = L_{10}(1-\rho^2)(121859-17\rho^2(298079-133\rho^2(20902-3\rho^2(23906-253\rho^2(133-65\rho^2))))),$$

$$P_{12}(\rho) = L_{12}(1-\rho^2)(113959-285\rho^2(22554-\rho^2 \times (291941-23\rho^2 \times (63956-33\rho^2(447-13\rho^2(366-145\rho^2))))),$$

$$L_0 = 2.218530, \quad L_2 = 0.4598770,$$

$$L_4 = 0.1225576, \quad L_6 = 0.02712496,$$

$$L_8 = 0.01345048, \quad L_{10} = 0.0001239479,$$

$$L_{12} = 0.0001516607.$$

Первые семь радиальных функций изображены на рис. 2. Итак, процедура абелизации свелась к простейшим операциям численного интегрирования: по совокупности экспериментально измеренных значений хордовой функции (ξ_i , φ_i) численным интегрированием по формуле (7) вычисляются коэффициенты c_{2m} и подставляются в решение (8). Ниже приведены выражения для первых семи четных хордовых (S_{2i}):

$$s_0(\xi) = k_0(1-\xi^2)^{3/2}$$

$$s_2(\xi) = k_2(1-\xi^2)^{3/2}(1-9\xi^2)$$

$$s_4(\xi) = k_4(1-\xi^2)^{3/2}(1-11\xi^2(2-13/3\xi^2))$$

$$s_6(\xi) = k_6(1-\xi^2)^{3/2}(1-13\xi^2(3-\xi^2(15-17\xi^2)))$$

$$s_8(\xi) = k_8(1-\xi^2)^{3/2}(1-\xi^2(60-17\xi^2 \times (30-19\xi^2(4-3\xi^2)))) \quad (10)$$

$$s_{10}(\xi) = k_{10}(1-\xi^2)^{3/2}(1-17\xi^2(5-19\xi^2(10/3-\xi^2(14-23\xi^2(1-5/9\xi^2)))))$$

$$s_{12}(\xi) = k_{12}(1-\xi^2)^{3/2}(1-19\xi^2(6-\xi^2(105-23\xi^2(28-15\xi^2(5-\xi^2(6-29/11\xi^2)))))),$$

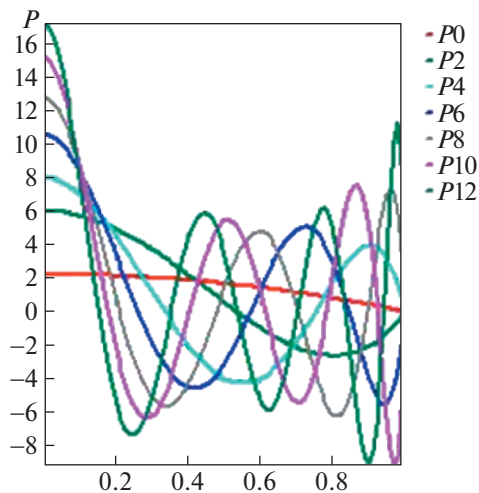


Рис. 2. Семь четных радиальных функций.

где k_{2i} — нормировочные коэффициенты:

$$k_0 = 1.479020, k_2 = 1.226339, k_4 = 1.176553, k_6 = 1.157332,$$

$$k_8 = 1.147775, k_{10} = 1.142303, k_{12} = 1.138871.$$

3. Ошибки определения радиальной функции. В случае аппроксимации многочленом, встает вопрос выбора степени многочлена: слишком низкая степень будет описывать грубо, а многочлен высокой степени (близкой к $N - 1$, где N — число экспериментальных точек) не будет сглаживать шум эксперимента, то есть на его коэффициентах будут сильно сказываться ошибки исходных данных. Если степень равна $(N - 1)$, то многочлен точно описывает все точки, и значит, сохраняет

весь шум. Если форма интерференционной полосы сложная, то может потребоваться большое количество экспериментальных точек, в таком случае возможно использование сглаживания, то есть замену экспериментальных точек другими, лежащими на гладкой кривой.

Способ разложения радиальной и хордовой функций степенными рядами предполагает, что распределения ограничены классом гладких функций и их первых производных. Вычисление коэффициентов c_{2i} по формулам (7) предполагает численное интегрирование, проведенное с хорошей точностью, иначе возможна ошибка в распределении $\varepsilon(\rho)$. Следует помнить, что большинство методов численного интегрирования рассчитано на то, что подынтегральная функция задана через одинаковые интервалы независимой переменной.

4. Выводы. Представлена схема абелизации, основанная на сплошной интерполяции как экспериментально измеренной хордовой функции, так и искомой радиальной функции ортогональными полиномами Чебышева. Алгебраические выражения, полученные для полиномов, могут быть использованы при создании численных кодов, предназначенных для восстановления радиальных распределений цилиндрически симметричных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. 1974. Москва: Наука.
2. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. 1971. Москва: Наука.
3. Baltog I., Ganciu M., Minut L., Zambreanu V., Zoita V. // Beitr. Plasma Phys. 1985. V. 25. P. 263.

Definition of Plasma Radial Density Profile from Interferometric Measurements

E. O. Baronova¹, * and V. V. Vikhrev¹

¹National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, 123182 Russia

*e-mail: baronova04@mail.ru

Received June 29, 2021; revised July 6, 2021; accepted July 8, 2021

Abstract—A scheme of the end-to-end polynomial interpolation of the chord and radial functions using Chebyshev polynomials is presented. Formulas for the first seven polynomials for both functions convenient for developing numerical codes are displayed.

Keywords: pulsed plasma interferometry, Abelization, interpolation using orthogonal polynomials