

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 539.1.074.3

# ТОЧЕЧНЫЙ ЗАРЯД МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ПЛАСТИНАМИ

© 2024 г. В. В. Самедов\*

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409 Россия

\*E-mail: v-samedov@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.

После доработки 30.06.2023 г.

Принята к публикации 30.06.2023 г.

Данная статья связана с появлением ссылки на мою работу, как работу, в которой выражение для плотности индуцированного заряда зарядом, находящимся между двумя плоскопараллельными бесконечными металлическими пластинами, находится в виде бесконечного ряда. Действительно, в моей работе есть формулы, полученные мною для функции Грина, поверхностной плотности индуцированного заряда на плоскопараллельных пластинах, записанные в виде бесконечных рядов. Однако работа была посвящена методу конформного преобразования исходной задачи к более простой задаче, позволяющей получить аналитические выражения для указанных величин. В настоящей статье я хотел бы внести ясность в создавшейся ситуации, и обрисовать преимущество метода конформного преобразования с учетом осевой симметрии задачи по сравнению с решением задачи в виде бесконечных рядов.

*Ключевые слова:* точечный заряд, две бесконечные параллельные проводящие пластины, конформное преобразование, функция Грина, индуцированный заряд, плотность поверхностного заряда, детекторы ионизационного типа, полупроводниковые детекторы, пиксельный электрод

**DOI:** 10.56304/S2079562923030296

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья связана с опубликованием статьи [1], посвященной исследованию алгоритмов первого пересечения броуновской частицей полусферы. Авторы, используя изоморфизм между задачей электростатики и задачей диффузии броуновской частицы, попытались применить этот алгоритм к определению распределения плотности индуцированного заряда единичным зарядом, находящимся между двумя плоскопараллельными бесконечными пластинами. В этой статье, они сослались на работы, в которых выражение для плотности индуцированного заряда зарядом, находящимся между двумя плоскопараллельными бесконечными пластинами, находится в виде бесконечного ряда. В числе этих работ упомянута и моя работа [2].

В связи с этим, я хотел бы внести ясность в создавшейся ситуации. Действительно, в работе [2] есть формулы, полученные мною для функции Грина, поверхностной плотности индуцированного заряда на плоскопараллельных пластинах, записанные в виде бесконечных рядов, которые послужили отправной точкой для поиска другого подхода к решению данной задачи. На самом деле работа [2] была посвящена методу конформного преобразования исходной задачи к более простой

задаче, позволяющей получить аналитические выражения для указанных величин.

## 2. ПРОБЛЕМА ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА МЕЖДУ ДВУМЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКИМИ ПРОВОДНИКАМИ

Почти 20 лет назад меня заинтересовала проблема точечного заряда между двумя бесконечными параллельными плоскими проводниками в связи с появлением детекторов ионизационного типа с пиксельной структурой электродов. Пиксельная структура электродов позволяет повысить точность определения положения и направления трека заряженной частицы в детекторе. Естественно, что основой этой задачи является определение распределения плотности индуцированного заряда единичным зарядом, находящимся между двумя плоскопараллельными бесконечными пластинами.

Всем известна классическая задача индукции заряда на бесконечной металлической пластине единичным зарядом, находящимся на некотором расстоянии от нее. Эта задача является основой метода изображений, вошедшего во все классические учебники и задачки, например [3]. Однако, в случае заряда, находящегося между двумя плоско-

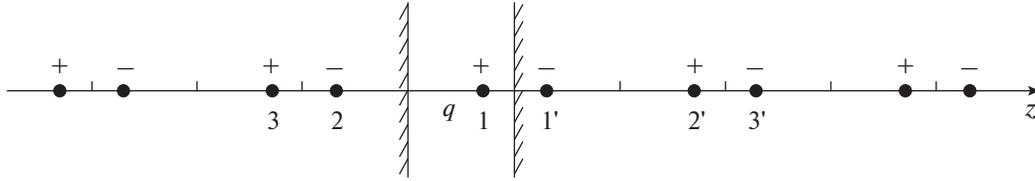


Рис. 1. Точечный заряд  $q$  между двумя бесконечными параллельными плоскими проводниками и его изображения.

параллельными бесконечными металлическими пластинами, возникают определенные трудности. В этом случае метод изображений приводит к бесконечному ряду зарядов-изображений, которые возникают в результате последовательных отражений в параллельных плоскостях (рис. 1).

Так как задача обладает осевой симметрией, то для ее использования целесообразно выбрать цилиндрические координаты  $(z, \rho, \varphi)$  с осью  $z$ , перпендикулярной проводящим плоскостям, и проходящей через точечный заряд. При выборе начала координат оси  $z$  посередине между плоскостями, будем считать, что точечный заряд имеет координату  $z_0$ , а координаты левой и правой проводящих плоскостей равны  $z_l = -(D/2)$  и  $z_r = +(D/2)$ . В этой системе координат я записал формальное решение для функции Грина [4]

$$G(z, \rho; z_0, 0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{(z - mD + (-1)^{m+1} z_0)^2 + \rho^2}}. \quad (1)$$

Осевая симметрия задачи гарантирует, что функция Грина (1) не зависит от координаты  $\varphi$  и удовлетворяет граничному условию Дирихле

$$G(\pm D/2, \rho; z_0, 0) = 0. \quad (2)$$

Формула (1) позволяет получить формулу для плотности поверхностного заряда, индуцированного на пластинах,

$$\sigma_r, l(\rho, z_0) = \frac{q}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m \left[ \left( \pm \frac{1}{2} - m \right) D + (-1)^{m+1} z_0 \right]}{\left\{ \left[ \left( \pm \frac{1}{2} - m \right) D + (-1)^{m+1} z_0 \right]^2 + \rho^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}, \quad (3)$$

где  $q$  — алгебраическая величина точечного заряда. Верхний и нижний знаки в формуле (3) соответствуют правой и левой проводящим плоскостям, соответственно.

Однако когда я посмотрел на бесконечную серию зарядов-изображений, я был поражен. Согласно классической задаче, точечный заряд  $q$  перед бесконечной заземленной проводящей плоскостью и его изображение  $-q$  индуцируют на плоскости суммарный заряд, равный  $-q$ , и этот результат не зависит от расстояния от точечного

заряда до проводящей плоскости. Если вы посмотрите на рис. 1, вы увидите, что точечный заряд 1 и его изображение 1' индуцируют на правой плоскости суммарный заряд, равный  $-q$ ; точечный заряд 2 и его изображение 2' индуцируют на плоскости суммарный заряд  $q$ , и так далее. Таким образом, интеграл от поверхностной плотности индуцированного заряда (3) по площади поверхности правой проводящей плоскости должен давать, в зависимости от количества пар изображений, либо  $-q$ , либо ноль, т.е. не сходится к определенному значению. А это означает, что ряд, составленный из слагаемых, представляющих интегралы по поверхности электрода от слагаемых ряда (3), является условно сходящимся. Этот результат отражает принципиальный недостаток метода изображений в случае заряда, находящегося между двумя плоскопараллельными бесконечными металлическими пластинами.

В то время существовало ограниченное число работ, посвященных нахождению поля электрического заряда, расположенного между двумя плоскопараллельными бесконечными пластинами [5–9]. Во всех этих работах решения находились в виде бесконечных рядов и интегральных представлений. Кстати, на условную сходимость рядов в случае заряда, находящегося между двумя плоскопараллельными бесконечными металлическими пластинами, указывалось в работах [5, 7, 9].

Понимая все это, я решил найти другой подход к решению данной задачи. Я представил себе заземленную проводящую металлическую сферу, с центром в точке  $z = 0$ , такую, для которой плоскости  $z_l = -(D/2)$  и  $z_r = +(D/2)$  являются касательными плоскостями к ее поверхности. Если представить, что радиус окружности сечения сферы плоскостью  $z = 0$ , бесконечно увеличивать, оставляя перпендикулярный диаметр неизменным и равным  $D$ , то в пределе, эта задача сведется к двум бесконечным плоскопараллельным металлическим пластинам, с расстоянием  $D$  между ними. При данном предельном переходе плотность индуцированного поверхностного  $-q$  заряда должна перераспределиться таким образом, чтобы линии напряженности электрического поля остались перпендикулярными проводящим плоскостям, потенциал которых должен оставаться неизменным и равным нулю. В результате, индуцированный заряд

на каждой проводящей плоскости останется неизменным и равным индуцированному заряду на каждой полусфере, а полный индуцированный заряд равен  $-q$ .

Чтобы воплотить указанный подход, я решил воспользоваться методом конформных преобразований. Я понимал, что комплексный потенциал справедлив только в двумерном пространстве. Однако меня вдохновила фраза в книге [10]: “В приложениях следует, однако, учитывать, что рассматриваемые здесь поля являются плоскими, поскольку функция комплексного переменного позволяет изображать только такое поле, векторы которого лежат в одной плоскости и не меняются в перпендикулярном к ней направлении. На практике эти требования не выполняются в точности, однако многие важные задачи можно с достаточной степенью приближения рассматривать как плоские”.

Используя этот подход, я получил решение задачи об индукции заряда на двух плоскопараллельных бесконечных металлических пластинах электрическим зарядом, находящимся между ними. Чтобы найти функцию Грина  $G(z, \rho; z_0, 0)$ , я использовал функцию Грина для точечного заряда внутри заземленной проводящей сферы радиуса  $R$  [4]

$$G(\vec{r}, \vec{z}_0) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{z}_0|} - \frac{R}{z_0 |\vec{r} - (R^2/z_0)(\vec{z}_0/z_0)|}. \quad (4)$$

Симметрия относительно полярной оси сферической системы гарантирует, что любое диаметрально сечение сферы может рассматриваться как комплексная плоскость. В этой двумерной плоскости координаты радиус-вектора  $\vec{r} = (r, \theta)$  можно рассматривать как модуль и аргумент комплексного числа  $w = (r, \theta)$ , а радиус-вектор точечного заряда как комплексное число  $w_0 = (z_0, 0)$ . Для сферы единичного радиуса величина и радиус-вектор заряда-изображения равны  $q' = -q/|w_0|$  и  $w_0' = 1/\bar{w}_0$ , соответственно, где  $\bar{w}_0$  обозначает комплексное сопряжение  $w_0$ . Функция Грина (4) на комплексной плоскости

$$G(w, w_0) = \frac{1}{|w - w_0|} - \frac{1}{|w\bar{w}_0 - 1|}, \quad (5)$$

очевидно, удовлетворяет граничному условию Дирихле для комплексного числа  $w_S$ , принадлежащего единичной окружности  $|w_S| = 1$ .

Скалярный электрический потенциал в диаметрально сечении, в котором находятся заряд и точка наблюдения, не зависит от того рассматриваем ли мы эту плоскость, как плоскость в трехмерной системе координат, или как комплексную плоскость. Так как функция Грина не зависит от координаты перпендикулярной

плоскости сечения, то функция Грина (4), а, следовательно, и функция Грина (5) удовлетворяют трехмерному уравнению Пуассона.

Функцию Грина (5) можно преобразовать к геометрии плоскопараллельных пластин с помощью конформного отображения. Для безразмерных переменных

$$\eta = (\pi z)/2D \text{ и } \xi = (\pi \rho)/2D, \quad (6)$$

функция

$$f : \zeta \rightarrow w = \tan \zeta \quad (7)$$

конформно отображает бесконечную параллельную полосу комплексной плоскости, с координатами  $\eta_l = -(\pi/4)$  и  $\eta_r = +(\pi/4)$  для левой и правой границ полосы, соответственно, на внутренность единичного круга [11]. Поскольку это преобразование справедливо для любого диаметрального сечения сферы, симметрия относительно полярной оси гарантирует, что отображение (7) преобразует правую и левую полусферы в правую и левую бесконечные плоскости, перпендикулярные оси  $z$ . Если радиус заземленной проводящей сферы  $R$  равен  $D/2$ , то после преобразования правая и левая бесконечные проводящие пластины будут касательными плоскостями к ее поверхности.

Функция (7) также осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементом дуги единичной окружности и элементом касательной к окружности, соответствующей проводящей пластине. Рассмотрим два диаметральных сечения сферы, пересекающихся под небольшим углом  $d\phi$  в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , и их следы на правой или левой проводящих пластинах. Каждый бесконечно малый элемент поверхности сферы между этими диаметрально сечениями  $dS(R, \theta, \phi) = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , благодаря отображению (7), преобразуется, в зависимости от полярного угла  $\theta$ , в бесконечно малый элемент поверхности правой или левой проводящих плоскостей  $dS(\rho, \phi) = \rho d\rho d\phi$ . Конформное отображение гарантирует точное соответствие граничных точек этих бесконечно малых элементов поверхности линиям электрического поля. Поскольку внутри замкнутой поверхности, образованной этими поверхностными элементами и соединяющими их границы линиями электрического поля, нет электрических зарядов, то дивергенция электрического поля равна нулю.

В результате конформного отображения (7) функция Грина для точечного электрического заряда внутри заземленной проводящей сферы (5) преобразуется в функцию Грина для точечного заряда между двумя бесконечными параллельными проводящими пластинами

$$G(z, \rho; z_0, 0) = \frac{2}{D} \sqrt{1 + \tan^2 \left( \frac{\pi z}{2D} \right) \tanh^2 \left( \frac{\pi \rho}{2D} \right)} \left\{ \left[ \left( \tan \left( \frac{\pi z}{2D} \right) - \tan \left( \frac{\pi z_0}{2D} \right) \right)^2 + \tanh^2 \left( \frac{\pi \rho}{2D} \right) \left( 1 + \tan \left( \frac{\pi z}{2D} \right) \tan \left( \frac{\pi z_0}{2D} \right) \right)^2 \right]^{-1/2} - \left[ \left( 1 - \tan \left( \frac{\pi z}{2D} \right) \tan \left( \frac{\pi z_0}{2D} \right) \right)^2 + \tanh^2 \left( \frac{\pi \rho}{2D} \right) \left( \tan \left( \frac{\pi z}{2D} \right) + \tan \left( \frac{\pi z_0}{2D} \right) \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}. \quad (8)$$

Так как дивергенция электрического поля в результате преобразования остается равной нулю во всем пространстве, за исключением точки нахождения электрического заряда  $(z_0, 0)$ , то конформно отображенная функция Грина автоматически удовлетворяет трехмерному уравнению Пуассона и граничному условию Дирихле (2), поскольку конформное отображение гарантирует, что линии электрического поля остаются нормальными к проводящим плоскостям. Следовательно, в соответствии с теоремой единственности [3], функция Грина (8) является единственно возможным решением задачи о точечном заряде между двумя бесконечными параллельными проводящими пластинами.

Формула для индуцированной поверхностной плотности заряда на проводящей сфере

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{1 - (z_0/R)^2}{\left(1 + (z_0/R)^2 - 2(z_0/R) \cos \theta\right)^{3/2}}, \quad (9)$$

в результате конформного отображения (7), с учетом преобразования бесконечно малых элементов поверхности,

$$\left| \frac{dS(R, \theta, \varphi)}{dS(\rho, \varphi)} \right| = \left| \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\rho d\rho d\varphi} \right| = \frac{2\pi R^2 \tanh \left( \frac{\pi \rho}{2D} \right) \left[ 1 - \tanh^2 \left( \frac{\pi \rho}{2D} \right) \right]}{D\rho \left[ 1 + \tanh^2 \left( \frac{\pi \rho}{2D} \right) \right]^2}, \quad (10)$$

преобразуется в формулу [2]

$$\sigma_{r,l}(\rho, z_0) = -\frac{q}{2D\rho} F_{r,l}^\sigma \left( \frac{\pi \rho}{2D}, \frac{\pi z_0}{2D} \right), \quad (11)$$

$$F_{r,l}^\sigma(\xi, \eta_0) = \frac{\tanh \xi (1 - \tanh^2 \xi) (1 - \tan^2 \eta_0)}{(1 + \tanh^2 \xi)^{1/2}} \times \frac{1}{\left[ \tanh^2 \xi (1 \pm \tan \eta_0)^2 + (1 \mp \tan \eta_0)^2 \right]^{3/2}}, \quad (12)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют правому и левому электродам соответственно.

Большим преимуществом аналитического решения (11) перед всеми численными методами, которые позволяют выполнить интегрирование по площади поверхности только после объемных вычислений во всех точках поверхности электрода, является то, что интегрирование выражения (11) дает формулу для заряда внутри окружности радиуса  $r$ , индуцированного заряженным носителем, расположенным в заданной точке  $z_0$

$$Q_{r,l}(r, z_0) = q F_{r,l}^Q \left( \frac{\pi r}{2D}, \frac{\pi z_0}{2D} \right), \quad (13)$$

$$F_{r,l}^Q \left( \frac{\pi r}{2D}, \frac{\pi z_0}{2D} \right) = \mp \frac{1}{2} \frac{(1 \pm \tan \eta_0)}{\tan \eta_0} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1 - (1 \mp \tan \eta_0) \times \left[ \frac{1 + \tanh^2 \xi}{\tanh^2 \xi (1 \pm \tan \eta_0)^2 + (1 \mp \tan \eta_0)^2} \right]^{1/2}}{1} \right\}. \quad (14)$$

Верхний и нижний знаки в формуле (14) соответствуют правому и левому электродам соответственно.

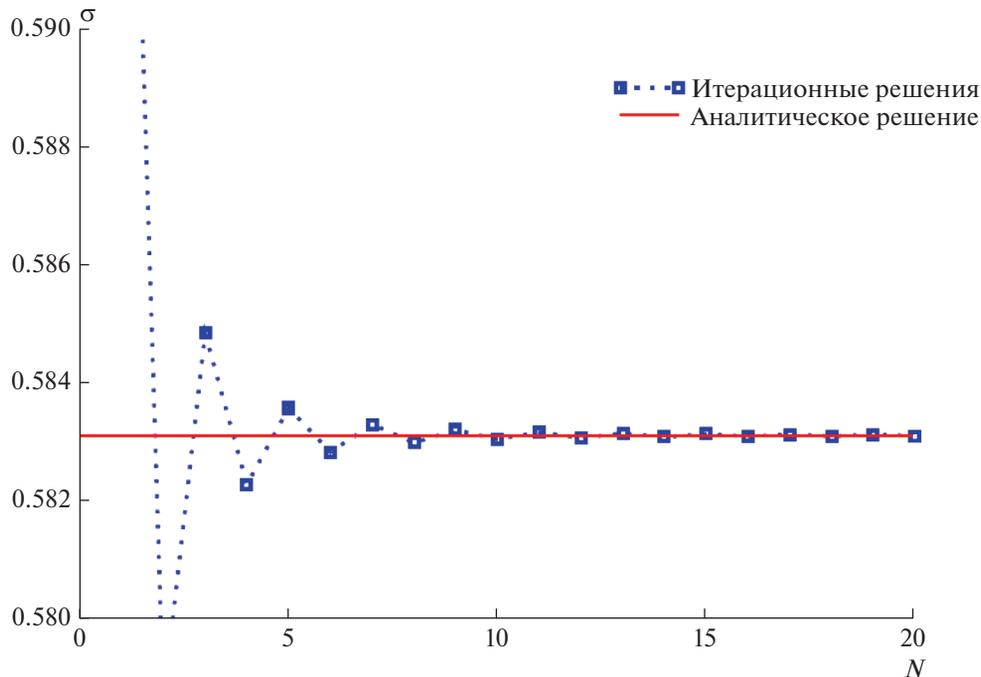
Формула для заряда, индуцированного на всей поверхности электрода, имеет вид

$$Q_{r,l}(\text{inf}, z_0) = q F_{r,l}^Q \left( \text{inf}, \frac{\pi z_0}{2D} \right), \quad (15)$$

$$F_{r,l}^Q(\text{inf}, \eta_0) = \mp \frac{1}{2} \frac{(1 \pm \tan \eta_0)}{\tan \eta_0 (1 + \tan^2 \eta_0)^{1/2}} \times \left[ (1 + \tan^2 \eta_0)^{1/2} - (1 \mp \tan \eta_0) \right], \quad (16)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют правому и левому электродам соответственно.

Важно отметить, что из формулы (15) следует, что суммарный заряд, индуцированный на правом и левом электродах, всегда равен  $-q$  независимо от положения точечного заряда  $z_0$ . Следует подчеркнуть, что в настоящее время не существует доказательства того, что интеграл от решения, представляемого в виде бесконечного ряда, по двум бесконечным поверхностям электродов конечен, и равен заряду  $-q$ . Скорее, существует доказательство обратного положения. На это я обратил внимание, начиная поиски моего подхода, что интеграл от поверхностной плотности индуцированного заряда (3) по площади поверхности любого электрода должен давать, в зависимости от количества пар изображений, либо  $-q$ , либо ноль, т.е. не должен сходиться к определенному значению. С другой стороны, если во всех точках поверхности электрода решение в виде бесконечного ряда сходилось бы к определенному значению, то и интеграл по поверхности электрода



**Рис. 2.** Сходимость последовательных итераций к аналитическому решению, для случая  $D = 1$  и  $q = 1$ , когда точечный заряд находится в центре  $z_0 = 0$ .  $N$  — число итераций [13].

должен был бы иметь определенное значение, хотя, мы видим, что это не так, т.е. ряды являются условно сходящимися.

На мой взгляд, доказательство того, что сумма интегралов по двум бесконечным поверхностям электродов от решения, представляемого в виде бесконечного ряда, конечна, и равна заряду  $-q$ , принципиально невозможно. Это же относится и к любым результатам, получаемым в результате расчетов методом Монте-Карло. Принципиальная невозможность связана не только с тем, что для этого необходимо провести бесконечный объем вычислений, но также и с тем, что все численные вычисления содержат принципиальные ограничения, связанные с точностью компьютера, т.е. с определенным форматом машинного представления действительных чисел с плавающей запятой. Как операция сложения, так и операция вычитания требует выравнивания порядков. Именно разрядность представления числа, определяющая точность компьютера, не позволяет численно проинтегрировать функцию, значения которой находятся ниже конечной точности, по бесконечной области. Конечная точность компьютера также приводит к конечному результату при численном суммировании условно сходящегося бесконечного ряда. Поскольку, согласно признаку Даламбера, если предел абсолютной величины отношения последующего члена ряда к предыдущему, при числе членов ряда стремящих-

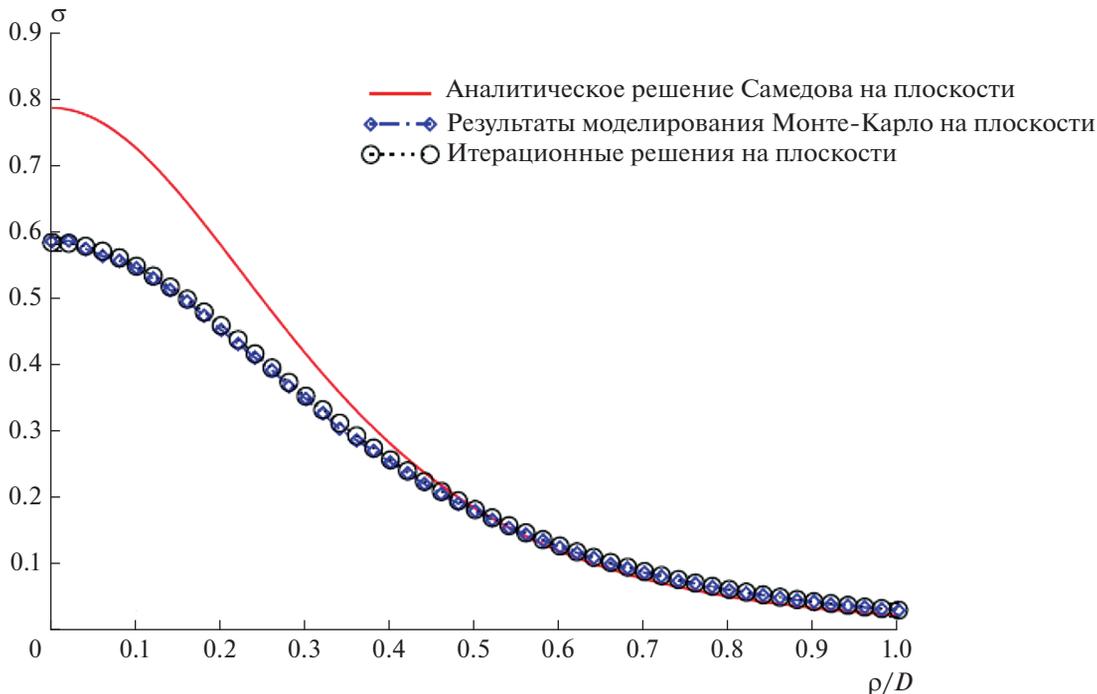
ся к бесконечности, равен единице, то ряд является условно сходящимся. В этом случае, в соответствии с теоремой Римана, члены условно сходящегося ряда всегда могут быть переставлены таким образом, чтобы получить любую сумму [12].

### 3. СРАВНЕНИЕ ХВАНГОМ И ДР. МОЕГО РЕШЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ, ПОЛУЧАЕМЫМИ КАК В ВИДЕ СУММИРОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ, ТАК И МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО.

В 2019 г. Хванг и др. опубликовали статью [13], в которой они сравнили результаты своих расчетов, проведенных как суммированием бесконечных рядов, так и методом Монте-Карло, с результатами моей теории. Их расчет поверхностной плотности заряда в точке плоскости электрода с координатами  $x = 0$  и  $y = 0$ , индуцированного точечным зарядом, расположенным в точке с координатами  $z_0 = 0$  и  $\rho = 0$ , методом суммирования бесконечного ряда дал результат, равный 0.583 (рис. 2), в то время как из формулы (11) следует значение

$$\sigma_{r, l}(0, 0) = -\frac{\pi q}{4D^2} = -\frac{q}{D^2} 0.7853981635\dots \quad (17)$$

Далее, они провели расчеты радиального распределения плотности поверхностного заряда, индуцированного на плоскостях отрицатель-



**Рис. 3.** Плотность поверхностного заряда, индуцированная на плоскостях отрицательным единичным точечным зарядом для  $\eta_0 = (\pi z_0)/2D = 0$  [13].

ным единичным точечным зарядом для случая  $\eta_0 = (\pi z_0)/2D = 0$  (рис. 3).

На основании проведенных расчетов они сделали вывод, что при изменении масштаба мое аналитическое решение может соответствовать решению в виде бесконечного ряда (рис. 4).

Результат, полученный путем суммирования бесконечного ряда в [13], представленный на рис. 2, я получил аналитически, анализируя полученную формулу для плотности поверхностного заряда, индуцированного на пластинах (3). Для точечного заряда, расположенного в точке  $z_0 = 0$ , формула (3) сводится к формуле

$$\sigma_{r,l}(\rho, 0) = \frac{q}{4\pi D^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m \left(\pm \frac{1}{2} - m\right)}{\left\{\left(\pm \frac{1}{2} - m\right)^2 + \rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}}. \quad (18)$$

Для  $\rho = 0$ , ряд в формуле (18) допускает точный результат суммирования, и поверхностная плотность заряда, индуцированная на пластинах, равна

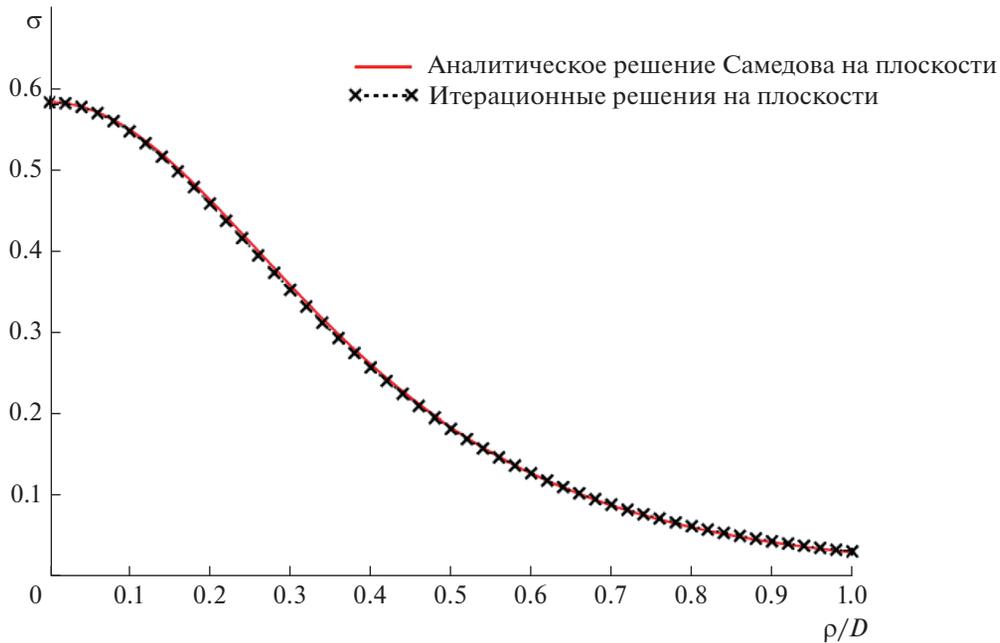
$$\begin{aligned} \sigma_{r,l}(0, 0) &= \frac{q}{\pi D^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m \text{signum}(2m \mp 1)}{(2m \mp 1)^2} = \\ &= -\frac{2qG}{\pi D^2} = -\frac{q}{D^2} 0.5831218080, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $G$  – постоянная Каталана [14]

$$G = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m + 1)^2} = 0.915965594.... \quad (20)$$

Следует отметить, что ряд в формуле (18) сходится абсолютно только в одной точке  $\rho = 0$ , поскольку ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (20) конечен, и равен  $\pi^2/8$ . Однако, во всех остальных точках  $\rho \neq 0$  абсолютная сходимость ряда в формуле (18) не определена, поскольку, согласно признаку Даламбера, если предел абсолютной величины отношения последующего члена ряда к предыдущему, при числе членов ряда стремящихся к бесконечности, равен единице, то ряд является условно сходящимся. Как правило, на практике сходимость условно сходящихся бесконечных рядов определяется конечной точностью компьютера, на что я уже обращал внимание.

Различие значений для поверхностной плотности заряда в одной точке плоскости электрода с координатами  $z = 0$  и  $\rho = 0$ , индуцированного точечным зарядом, находящимся в точке с координатами  $z_0 = 0$  и  $\rho = 0$ , т.е. значения (19), полученного методом суммирования бесконечного ряда, и значения (17), которое следует из аналитиче-



**Рис. 4.** График плотности поверхностного заряда, индуцированного на плоскостях отрицательным единичным точечным зарядом для  $\eta_0 = (\pi z_0)/2D = 0$ , при изменении масштаба по оси ординат [13].

ской формулы (11), справедливой во всей области изменения переменных, не является серьезным аргументом для непринятия моей теории. Тем более что интеграл по поверхности электрода от решения в виде бесконечного ряда является условно сходящимся.

На основании проведенных расчетов Хванг и др. утверждают, что полученные расхождения результатов обусловлены тем, что не существует способа конформного отображения заземленной проводящей сферы на параллельные плоскости в трехмерном пространстве, что конформное отображение применимо только к двумерным распределениям. Тем не менее, они делают заключение, что, хотя мое аналитическое решение расходится с решением в виде бесконечных рядов, оно может быть хорошей формой аналитической аппроксимации решения для задачи о точечном заряде между двумя бесконечными параллельными плоскими проводниками.

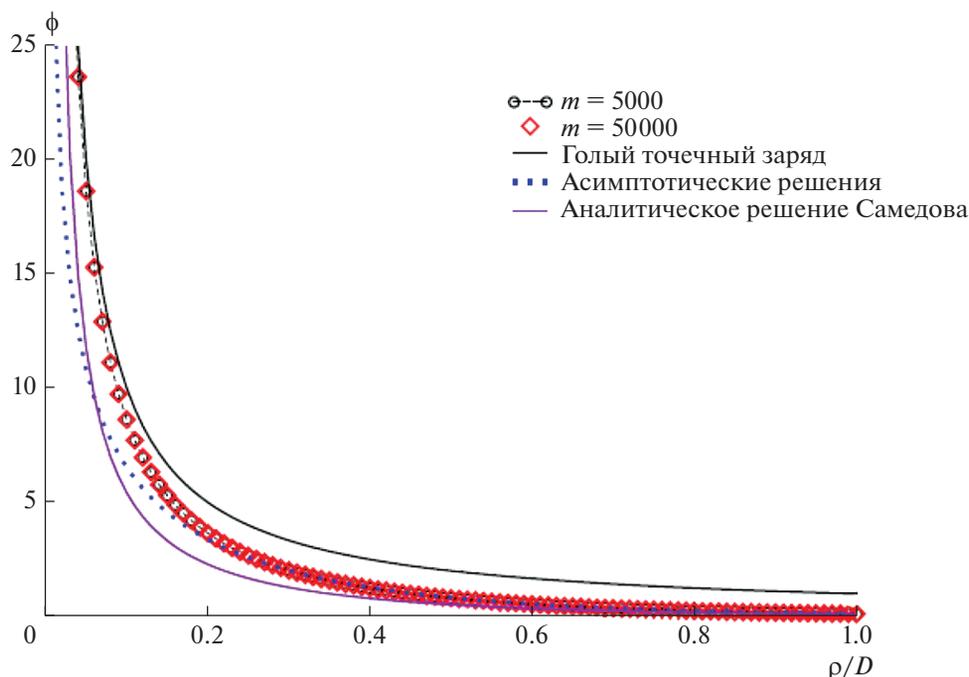
Несмотря на аргумент Хванга и др., что не существует способа конформного отображения заземленной проводящей сферы на параллельные плоскости в трехмерном пространстве, тем не менее, применение конформного преобразования с учетом осевой симметрии, приводит к тому, что полученная мною функция Грина является хорошим приближением к решению задачи о точечном заряде между двумя бесконечными параллель-

ными проводящими пластинами в трехмерном случае. Это подтверждают их результаты расчетов, приведенные на рис. 5. Замечу, что формула (4) для асимптотического решения, полученного в работе [6], справедлива только для случая  $\rho \geq D$ .

Предложение Хванга и др. [13] изменить масштаб в формуле для плотности индуцированного поверхностного заряда (11) на отношение констант, входящих в формулы (17) и (19), неприемлемо, поскольку это приведет к нарушению закона сохранения полного индуцированного поверхностного заряда, равного  $-q$ . Соблюдение закона сохранения полного индуцированного поверхностного заряда, независимо от положения точечного заряда  $z_0 = 0$ , является важным свойством формулы (15), которая следует из формулы (11). Тем не менее, из результатов расчетов Хванга и др., приведенных на рис. 4 следует, что при использовании формулы (11) как функции распределения плотности заряда в зависимости от радиальной координаты, после ее нормирования, все противоречия с методом суммирования бесконечных рядов исчезают.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Я очень признателен Хвангу и др. за их скрупулезное сравнение моего решения с результатами расчетов, получаемыми как путем суммирования бесконечных рядов, так и методом Монте-Карло.



**Рис. 5.** Решения для функции Грина для  $z = 0$  и  $z_0 = 0$ . Решения путем суммирования бесконечного ряда обозначены черными кружками и красными ромбами в зависимости от числа членов,  $m$ . Асимптотическое решение представляет формулу (4), полученную в работе [6]. Также показан потенциал, обусловленный точечным зарядом [13].

Результаты сравнения показывают, что использование метода конформного преобразования с осевой симметрией позволяет получить решение в аналитической форме в трехмерном пространстве, которое согласуется с их результатами. Если учесть, что невозможно проверить закон сохранения заряда для решения в виде бесконечных рядов или методом Монте-Карло без проведения объемных расчетов во всех точках поверхностей обоих плоскопараллельных пластин, то преимущество моего решения очевидно. Поскольку в настоящее время, помимо моего подхода, не существует работ, в которых получены аналитические выражения для решения задачи о точечном заряде между двумя бесконечными параллельными проводящими пластинами, то я буду очень рад, если кому-либо удастся получить аналитическое решение, которое будет лучше моего, будет справедливо во всей области изменения переменных, и снимет вопрос о правильном значении для плотности индуцированного поверхностного заряда на пластинах в точках их пересечения с осью  $z$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. *Jinseong Son, Dongheyon Shin, Chi-Ok Hwang* // Sci. Rep. 2023. V. 13 (1). P. 1.
2. *Samedov V.V.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2012. V. 59. P. 3189.
3. *Джексон Дж.Д.* Классическая электродинамика. 1995. Москва: Мир.
4. *Samedov V.V.* // X-Ray Spectrom. 2007. V. 36. P. 158.
5. *Ching Yao Fong, Kittel C.* // Amer. J. Phys. 1967. V. 35. P. 091.
6. *Pumplin J.* // Amer. J. Phys. 1969. V. 37 (7). P. 737.
7. *Zahn M.* // Amer. J. Phys. 1976. V. 44 (11). P. 1132.
8. *Glasser M.L.* // Amer. J. Phys. 1970. V. 38 (4). P. 415.
9. *Pleines J., Mahajan S.* // Amer. J. Phys. 1977. V. 45. P. 868.
10. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. 1963. Москва: ИЛ.
11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. 1973. Москва: Наука.
12. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: том 2. 1970. Москва: Наука.
13. *Chi-Ok Hwang et al.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2019. V. 66. P. 2153.
14. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series and Products. 2007. San Diego: Elsevier Academic Press.

## Point Charge between Two Plane-Parallel Metal Plates

V. V. Samedov\*

*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

*\*e-mail: v-samedov@yandex.ru*

Received June 30, 2023; revised June 30, 2023; accepted June 30, 2023

**Abstract**—This article is in response to a reference to my work as a work in which the expression for the density of the charge induced by the point charge between two infinite plane-parallel plates is in the form of an infinite series. Indeed, in my article there were formulas that I obtained for the Green's function, the surface density of the induced charge on plane-parallel plates written as infinite series. However, the article was devoted to the method of conformal transformation of the initial problem to a simpler one, which makes it possible to obtain analytical expressions for the mentioned quantities. In the present article, I would like to clarify the situation and outline the advantage of the conformal transformation method taking into account the axial symmetry of the problem as compared to solving the problem in the form of infinite series.

*Keywords:* point charge, two infinite parallel conducting plates, image charge, conformal transformation, Green's function, induced charge, surface charge density, ionization-type detectors, semiconductor detectors, pixel electrode