

УСКОРИТЕЛИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

УДК 621.384.6

СПИНОВАЯ ХРОМАТИЧНОСТЬ ПУЧКА: УДЛИНЕНИЕ ОРБИТЫ И БЕТАТРОННАЯ ХРОМАТИЧНОСТЬ

© 2022 г. Ю. В. Сеничев^а, *, А. Е. Аксентьев^а, А. А. Мельников^а

^аИнститут ядерных исследований РАН, проспект 60-летия Октября 7а, Москва, 117312 Россия

*E-mail: y.senichev@inr.ru

Поступила в редакцию 19.07.2021 г.

После доработки 09.08.2021 г.

Принята к публикации 09.08.2021 г.

Основная идея метода измерения электрического дипольного момента основана на измерении усредненной частоты прецессии спина частиц в сгустке. Проблема максимального времени когерентности прецессии спина частиц в сгустке сводится к минимизации разброса длин орбит всех частиц. Это достигается введением секступолей с полями, которые минимизируют хроматичность частоты прецессии спина. Мы экспериментально обнаружили, что минимизация хроматичности бетатронного движения приводит к минимизации хроматичности частоты прецессии спина. В этой статье мы исследуем эту взаимосвязь.

Ключевые слова: удлинение орбиты, бетатронные колебания, хроматичность

DOI: 10.56304/S2079562922010389

ВВЕДЕНИЕ

Основная идея метода измерения электрического дипольного момента основана на измерении усредненной частоты прецессии спина частиц в сгустке; поэтому время, в течение которого колебания спина частиц в сгустке остаются когерентными, играет решающую роль в экспериментах по поиску электрического дипольного момента протона/дейтрона. Это время называется временем когерентных колебаний, и его нужно иметь как можно большим. Эффекты спиновой декогеренции возникают из-за зависимости частоты прецессии спина от траектории частицы в трехмерном пространстве. В связи с тем, что в случае сгруппированного пучка все частицы находятся в сепаратрисе, каждая из них должна совершить один оборот в ускорителе в среднем за один и тот же период независимо от длины их орбиты. Это возможно только в том случае, когда скорости различных частиц сгустка различны. В связи с этим возникает так называемая эффективная энергия частицы, которая определяет частоту прецессии спина в трехмерном пространстве. Таким образом, проблема максимального времени когерентности для прецессии спина частиц в сгустке сводится к минимальному разбросу длин орбит всех частиц. Это достигается путем введения секступолей с полями, минимизирующими хроматичность частоты прецессии спина. Экспериментально было обнаружено, что минимизация бетатронной хроматичности приводит к минимизации спиновой хроматичности.

1. ТРИ ВИДА ОТКЛОНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ ОТ ОСИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УДЛИНЕНИЕ ОРБИТЫ

Запишем уравнение движения в горизонтальной и вертикальной плоскостях $x(s), y(s)$ с продольной координатой s :

$$\begin{aligned} x'' + K_1(s)x &= \frac{1}{\rho(s)}\delta_0 + F_{\text{kick}}^x(s), \\ y'' - K_1(s)y &= +F_{\text{kick}}^y(s), \end{aligned} \quad (1)$$

где $K_1(s) = \frac{B'(s)}{\rho B_y}$ — сила квадруполь с градиентом

$B'(s) = \frac{\partial B_y}{\partial x}(s)$, $\rho(s)$ — кривизна орбиты, $\delta_0 = \frac{\Delta p}{p_0}$

разброс по импульсам, $F_{\text{kick}}^x(s)$ and $F_{\text{kick}}^y(s)$ внешние нелинейные силы произвольного порядка. В

частности, для секступоля: $F_{\text{kick}}^x(s) = K_2(s)\frac{x^2 - y^2}{2}$

и $F_{\text{kick}}^y(s) = -K_2(s)xy$, где $K_2(s) = \frac{B''(s)}{\rho B_y}$ с градиентом

$B''(s) = \frac{\partial^2 B_y(s)}{\partial x^2}$. Здесь мы вводим обозначение

“kick” $F_{\text{kick}}^{x,y}$, поскольку в дальнейшем правая часть уравнения (1) будет рассматриваться как слабое возмущение собственного колебания частицы,

сосредоточенное на коротком периоде с фиксированным отклонением от оси.

Общее смещение “нереференсной” частицы относительно референсной определяется тремя составляющими

$$x(s) = \underbrace{x_\beta(s)}_{\text{\beta-бетатронный член}} + \underbrace{\eta(s)\delta}_{\text{член } x_\eta \text{ благодаря дисперсии } \eta} + \underbrace{x_{\text{kick}}(s)}_{\text{kick член } n\text{-го порядка}},$$

$$y(s) = \underbrace{y_\beta(s)}_{\text{\beta-бетатронный член}} + \underbrace{y_{\text{kick}}(s)}_{\text{kick член } n\text{-го порядка}}. \quad (2)$$

а) “β-бетатронный” член

Мы предполагаем, что дисперсия в вертикальной плоскости отсутствует. Теперь давайте определим каждый член отдельно. Начнем с первого β-осциллирующего члена $x_\beta(s)$. Его можно определить, решив однородное уравнение Хилла, описывающее свободные колебания в оптике с нулевой дисперсией:

$$x'' + K_1(s)x = 0. \quad (2a)$$

Используя теорему Флоке [1]:

$$x_\beta(s) = \sqrt{2J_x \beta_x(s)} \cos[\psi_x(s)], \quad (3)$$

где $\beta_x(s)$ – beta функция, $\psi_x(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\beta_x(t)} dt$ – фа-

за Флоке, $J_x(s) = \oint x' dx$ – интеграл действия. Вместо интеграла действия часто используется простое выражение для описания бетатронного движения $x_\beta(s) = \sqrt{\epsilon_x \beta_x(s)} \cos[\psi_x(s)]$. В вертикальной плоскости – аналогично:

$$y_\beta(s) = \sqrt{2J_y \beta_y(s)} \cos[\psi_y(s)]. \quad (3a)$$

б) “Дисперсионный” член

Определим член, возникающий из-за дисперсии $x_\eta(s) = \delta_0 \eta(s)$ в горизонтальной плоскости, где периодическое решение дисперсии $\eta(s)$ определяется из уравнения (без $F_{\text{kick}}^{x,y}(s)$):

$$\eta'' + K_1(s)\eta = \frac{1}{\rho(s)}. \quad (4)$$

Периодическое решение (4) ищем методом вариации постоянных:

$$\eta(s) = \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \times \oint \frac{1}{\rho(t)} \sqrt{\beta_x(t)} \cos[\psi(t) - \psi(s) - \pi \nu_x] dt. \quad (4a)$$

Умножая (4a) на разброс по импульсам, мы получаем второй член $x_\eta(s) = \delta_0 \eta(s)$ в (2):

$$x_\eta(s) = \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \times \oint \frac{\delta_0}{\rho(t)} \sqrt{\beta_x(t)} \cos[\psi(t) - \psi(s) - \pi \nu_x] dt. \quad (5)$$

с) Внешний “kick”

Здесь мы предполагаем, что в произвольной точке орбиты $s = s_i$ воздействует сила $F_{\text{kick}}(s_i)$. Снова воспользуемся методом вариации постоянных. Интегрируя по длине элемента L_i в приближении постоянства силы воздействия и суммируя по всем элементам, мы получаем выражение для $x_{\text{kick}}(s)$:

$$x_{\text{kick}}(s) = \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \times \sum_i \sqrt{\beta_x(s_i)} F_{\text{kick}}(s_i) L_i \cos[\psi(s_i) - \psi(s) - \pi \nu_x]. \quad (6)$$

2. УДЛИНЕНИЕ ОРБИТЫ

У нас есть все необходимые выражения для определения удлинения орбиты. В обычном понимании, это

$$\Delta C_\Sigma = \int_0^C \frac{x}{\rho} ds + \int_0^C \left(\frac{x'^2 + y'^2}{2} \right) ds, \quad (7)$$

где x, y – совокупное отклонение по обеим координатам.

а) Нелинейный вклад

Начнем с нелинейного вклада x'^2, y'^2 подставляя его во второй интеграл выражения (7).

Используя (3) и соотношение для параметров Твисса $\psi' = 1/\beta$ и $\alpha = -\beta'/2$ мы имеем для однородного уравнения (2a):

$$x'_\beta(s) = -\frac{\sqrt{2J_x}}{\sqrt{\beta_x(s)}} \{ \alpha_x \cos[\psi_x(s)] + \sin[\psi_x(s)] \}. \quad (8)$$

Поскольку усредненная по кольцу величина $\beta' = 0$, то $\alpha = 0$ и $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$, и (8) принимает вид:

$$x'_\beta(s) = -\frac{\sqrt{2J_x}}{\sqrt{\beta_x(s)}} \sin[\psi_x(s)] = -\sqrt{2J_x \gamma_x(s)} \sin[\psi_x(s)]. \quad (9)$$

Аналогично для вертикальной плоскости:

$$y'_\beta(s) = -\sqrt{2J_y \gamma_y(s)} \sin[\psi_y(s)] \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (7) мы имеем:

$$\Delta C_{x',y'} = \int_0^C \left(\frac{x'^2 + y'^2}{2} \right) ds = 2J_x \frac{1}{2} \times$$

$$\times \int_0^C \gamma_x \sin^2 [\psi_x(s)] ds + 2J_y \frac{1}{2} \int_0^C \gamma_y \times$$

$$\times \sin^2 [\psi_y(s)] ds = \frac{1}{2} J_x \int_0^C \gamma_x ds + \frac{1}{2} J_y \int_0^C \gamma_y ds. \quad (11)$$

б) Линейный вклад

Вклад бетатронного члена $x_\beta(s)$ первой части (7) будет нулевым; поэтому удлинение орбиты (7) определяется только членом $x_\eta(s)$:

$$\Delta C_{\frac{x}{\rho}} = \int_0^C \frac{x_\beta(s) + x_\eta(s)}{\rho} ds =$$

$$= \underbrace{\int_0^C \frac{\sqrt{\epsilon_x \beta_x(s)} \cos[\psi_x(s)]}{\rho} ds}_{\downarrow 0} +$$

$$+ \int_0^C \frac{x_\eta(s)}{\rho} ds = \int_0^C \frac{x_\eta(s)}{\rho} ds, \quad (12)$$

и

$$\Delta C_{\frac{x}{\rho}} = \delta_0 \int_0^C \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds. \quad (13)$$

Поскольку интеграл (13) совпадает с определением коэффициента расширения орбиты, то

$$\Delta C_{\frac{x}{\rho}} = \delta_0 \alpha(\delta_0^n) = \delta_0 (\alpha_0 + \alpha_1 \delta_0 + \alpha_2 \delta_0^2 + \dots) \quad (14)$$

Очевидно, что коэффициент расширения орбиты (13) вносит существенный вклад в удлинение орбиты из-за своего линейного члена α_0 в выражении (14). Для компенсации этого влияния используется ВЧ поле, “перемешивающее” по энергии частицы с различным отклонением от равновесного импульса; таким образом мы получаем $\delta_0 \alpha_0 \approx 0$. Однако это не позволяет получить $\delta_0^2 \approx 0$. Следовательно, в случае значительного вклада нелинейного члена в удлинение орбиты потребуется специальная структура, где с помощью секступолей происходит подстройка $\alpha_1 \approx 0$.

с) Внешний “kick”

Используя выражение (6) и подставляя его в $\Delta C_{\text{kick}} = \int_0^C \frac{x}{\rho} ds$, мы получаем общее выражение для удлинения орбиты за счет нелинейной внешней силы:

$$\Delta C_{\text{kick}} = \sum_i F_{\text{kick}}(s_i) L_i \frac{\sqrt{\beta_x(s_i)}}{2 \sin \pi \nu_x} \times$$

$$\times \int_0^C \frac{1}{\rho(s)} \sqrt{\beta_x(s)} \cos[\psi(s) - \psi(s_i) - \pi \nu_x] ds =$$

$$= \sum_i F_{\text{kick}}(s_i) L_i \eta(s_i). \quad (15)$$

Таким образом, удлинение орбиты, связанное с воздействием внешней силы, равно сумме произведения нормированной силы на дисперсионную функцию в точке воздействия силы. В дальнейшем эта формула будет использоваться для нелинейного воздействия секступолей.

д) Секступольная коррекция

Теперь рассмотрим секступольную коррекцию удлинения орбиты. В этом случае уравнение (1) принимает вид:

$$x'' + K_1(s)x = \frac{1}{\rho(s)} \delta_0 + \frac{1}{2} K_2(x^2 - y^2). \quad (16)$$

Многие авторы упрощают решение уравнения (16), заменяя нелинейный член $\frac{1}{2} K_2(x^2 - y^2)$ на постоянное воздействие вдоль i -го секступоля с силой

$$F_{i \text{ kick}} L_i = \frac{1}{2} K_2(x_i^2 - y_i^2) L_i. \quad (17)$$

пропорциональной квадрату отклонения частицы от оптической оси, то есть заменой нелинейного члена на постоянный. Подставляя (3) и (3а) в (17), мы имеем:

$$F_{i \text{ kick}} L_i = K_2 J_x \beta_x L_i \cos^2[\psi_x(s)] -$$

$$- K_2 J_y \beta_y L_i \cos^2[\psi_y(s)] =$$

$$= \frac{1}{2} K_2 J_x \beta_x L_i - \frac{1}{2} K_2 J_y \beta_y L_i. \quad (18)$$

Следуя (15), можно записать выражение для удлинения орбиты за счет секступолей:

$$\Delta C_{\text{sext}} = \frac{J_x}{2} \sum_i K_2^i L_i \beta_x(s_i) \eta(s_i) -$$

$$- \frac{J_y}{2} \sum_i K_2^i L_i \beta_y(s_i) \eta(s_i) \quad (19)$$

или, переходя к интегрированию в (19), имеем удлинение орбиты вместе с (11) и (14):

$$\begin{aligned} \Delta C_{\Sigma} = & \frac{J_x}{2} \int_0^c [\gamma_x + K_2 \beta_x(s) \eta(s)] ds + \\ & + \frac{J_y}{2} \int_0^c [\gamma_y - K_2 \beta_y(s) \eta(s)] ds + \\ & + \delta_0 (\alpha_0 + \alpha_1 \delta_0 + \alpha_2 \delta_0^2 + \dots). \end{aligned} \quad (20)$$

3. БЕТАТРОННАЯ ХРОМАТИЧНОСТЬ И УДЛИНЕНИЕ ОРБИТЫ

Хроматичность в обеих плоскостях определяется известной формулой [2]:

$$\begin{aligned} \xi_x = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^c (K_1 \beta_x + K_2 \beta_x \eta) ds, \\ \xi_y = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^c (K_1 \beta_y - K_2 \beta_y \eta) ds. \end{aligned} \quad (21)$$

Одновременно, из соотношения между параметрами Твисса: $K_1 \beta_{x,y} = \gamma_{x,y} + \alpha'_{x,y}$, и поскольку $\int_0^c \alpha'_{x,y} ds = 0$ — получаем:

$$\int_0^c K_1 \beta_{x,y} ds = \int_0^c (\gamma_{x,y} + \alpha'_{x,y}) ds = \int_0^c \gamma_{x,y} ds. \quad (22)$$

Окончательно, можно записать выражение для бетатронной хроматичности

$$\begin{aligned} \xi_x = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^c (\gamma_x + K_2 \beta_x \eta) ds, \\ \xi_y = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^c (\gamma_y - K_2 \beta_y \eta) ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Сравнивая (20) с (23) мы можем представить удлинение орбиты через бетатронную хроматичность:

$$\begin{aligned} \Delta C_{\Sigma} = & -2\pi (J_x \xi_x + J_y \xi_y) + \\ & + \delta_0 (\alpha_0 + \alpha_1 \delta_0 + \alpha_2 \delta_0^2 + \dots). \end{aligned} \quad (24)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, можно сказать, что в приближении коротких секступольных элементов бетатронные колебания дают нулевой вклад в удлинение орбиты (а следовательно в спиновую хроматичность), если бетатронная хроматичность равна нулю. Однако следует особо подчеркнуть: продольное движение вносит вклад в спиновую хроматичность независимо от бетатронной хроматичности, и его вклад может быть уменьшен до нуля только лишь при наличии ВЧ поля и нулевого вклада нелинейного члена $\alpha_1 = 0$ в удлинение орбиты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. Wilson E.J.N. // Report CERN 95-06. . 1995. V. I.
2. Verdier A. // Report CERN 95-06. 1995. V. I.

Spin Chromaticity of Beam: Orbit Lengthening and Betatron Chromaticity

Y. V. Senichev¹*, A. E. Aksentyev¹, and A. A. Melnikov¹

¹Institute for Nuclear Research of Russian Academy of Sciences, Moscow 117312 Russia

*e-mail: y.senichev@inr.ru

Received July 19, 2021; revised August 9, 2021; accepted August 9, 2021

Abstract—One possible method of measuring the electric dipole moment of an elementary particle consists in measuring the average spin precession frequency of a polarized beam. The problem of maximizing the spin coherence time of a bunched beam is reduced to the minimization of the particles' orbit length dispersion. This is achieved by introducing sextupoles with fields minimizing the chromaticity of the spin frequency. We have found experimentally that minimizing the chromaticity of betatron motion leads to the minimization of the chromaticity of the spin frequency. In this paper we explore this relationship.

Keywords: orbit lengthening, spin, betatron oscillation, chromaticity