*ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА И ИНЖИНИРИНГ, 2022, том 13, № 3, с. 246–264*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

*УДК 539.1.074.3*

# ЗАЧЕМ НУЖНА ФОРМУЛА ДЛЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАЗРЕШЕНИЯ СЦИНТИЛЛЯЦИОННОГО СПЕКТРОМЕТРА С НЕСКОЛЬКИМИ ФОТОДЕТЕКТОРАМИ?


**В. В. Самедов***

*Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409 Россия*

**E-mail: v-samedov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 06.07.2021 г.
После доработки 13.08.2021 г.
Принята к публикации 16.08.2021 г.

В настоящее время появляются работы, в которых предлагаются различные формулы для энергетического разрешения сцинтилляционных спектрометров, порой противоречащие друг другу. Слагаемые, входящие в формулы для энергетического разрешения, различаются не только названиями, но также и физическим смыслом учитываемых ими процессов. Главный недостаток всех существующих теорий сцинтилляционных спектрометров заключается в необоснованном введении различных слагаемых в формулу для энергетического разрешения, без их связи с конкретными характеристиками сцинтилляционного детектора. Такой подход является не только неправильным, но и контрпродуктивным, поскольку не позволяет сравнивать результаты, полученные различными научными группами. В данной работе, на основании стандартной теории сцинтилляционных спектрометров с несколькими фотодетекторами, проведен анализ недостатков существующих теорий. Показано, что только формулы стандартной теории для произвольных моментов функции распределения выходных сигналов фотодетекторов сцинтилляционного спектрометра служат надежной основой для связи теоретических и экспериментальных исследований в области физики сцинтилляционных детекторов.

*Ключевые слова:* сцинтилляционный детектор, фотодетектор, энергетическое разрешение, световыход, нелинейность световыхода, светосбор, фактор Фано, ковариации сигналов

**DOI:** 10.56304/S2079562922010341

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, физика сцинтилляторов представляет широкую область теоретических и экспериментальных исследований в физике и химии сцинтилляторов, в области технологий создания новых сцинтилляционных кристаллов и их использованию в физических экспериментах. Однако все особенности и преимущества нового сцинтиллятора проявляются только в экспериментальных исследованиях его свойств в качестве кристалла сцинтилляционного спектрометра. Поэтому, одна из целей теории сцинтилляционных спектрометров состоит в том, чтобы сформулировать условия, при которых особенности процессов, происходящих в сцинтилляторе, могут быть извлечены из сигнала фотодетектора сцинтилляционного спектрометра.

Работа Эрнста Брайтенбергера [1] была первой фундаментальной работой в теории сцинтилляционных спектрометров, в которой была последовательно использована теория случайных процессов. Все главные формулы и выводы этой работы воспроизведены в книге Дж. Биркса [2], которая до сих пор является справочным пособием для физиков, работающих в области сцинтилляционных детекторов.

Работа Брайтенбергера, являясь самой значительной теорией сцинтилляционных спектрометров для своего времени, содержит ряд фундаментальных недостатков. Во-первых, это — макроскопическая теория, в которой описание последовательных каскадных процессов основано на использовании моментов функций распределения средних значений соответствующих этапов. Во-вторых, она предполагает, что каждая регистрируемая частица с энергией $E$, взаимодействуя со сцинтиллятором, производит в среднем $\overline{N} = E/\varepsilon$ световых фотонов, где $\varepsilon$ — средняя энергия образования светового фотона. Таким образом, в теории Брайтенбергера отсутствуют промежуточные этапы, которые происходят в сцинтилляторе при регистрации излучений, а именно, преобразование энергии регистрируемой частицы в энергию вторичных заряженных частиц, генерацию электронно-дырочных пар и возбуждение люминесцентных центров. В-третьих, она предполагает, что флуктуации числа световых фотонов, генерируемых в сцинтилляторе регистрируемой частицей, подчиняются распределению Пуассона. В-четвертых, она применима только к сцинтилляционным спектрометрам с одним фотодетектором.

В работах [1, 2], приведены формулы для среднего значения и относительной дисперсии выходного сигнала сцинтилляционного детектора

$$\overline{Q} = \overline{N} \cdot \overline{p} \cdot \overline{M}, \tag{1}$$

$$\eta_Q^2 = \frac{\sigma_Q^2}{\overline{Q}^2} = \eta_p^2 + (1+\eta_p^2)\left(\eta_N^2 - \frac{1}{\overline{N}}\right) + \frac{1+\eta_M^2}{\overline{N}\cdot\overline{p}}, \tag{2}$$

где $\overline{N}$ и $\eta_N^2$ – среднее значение и относительная дисперсия числа световых фотонов; $\overline{p}$ и $\eta_p^2$ – среднее значение и относительная дисперсия вероятности образовать световому фотону фотоэлектрон на первом диноде фотоумножителя.

Из формулы (2) следует, что минимальное значение относительной дисперсии выходного сигнала достигается, когда флуктуации числа световых фотонов описываются распределением Пуассона и флуктуации образования фотоэлектрона на первом диноде фотоумножителя отсутствуют, т.е. $\eta_p^2 = 0$, $\overline{p} = p$. Это минимальное значение

$$\eta_{Q\,\min}^2 = \frac{1+\eta_M^2}{\overline{N}\cdot p}, \tag{3}$$

во многих теоретических работах интерпретируется как собственное энергетическое разрешение сцинтилляционного детектора, т.е. предельное энергетическое разрешение, которое может быть достигнуто в сцинтилляционном детекторе.

## 2. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ ПОСЛЕ РАБОТЫ БРАЙТЕНБЕРГЕРА

В последующих работах, чтобы объяснить несоответствие между результатами эксперимента и формулой (3), авторы начали включать различные вклады, отражающие, с их точки зрения, влияние тех или иных факторов на энергетическое разрешение сцинтилляционных спектрометров. Не вдаваясь в конкретные обозначения в приведенных ниже формулах различных авторов, отметим включение в формулу для энергетического разрешения сцинтилляционного спектрометра вкладов, отличающихся не только названиями, но также и физическим смыслом принимаемых во внимание процессов. Так, в работе [3], дана формула для энергетического разрешения сцинтилляционного спектрометра

$$(\Delta E/E)^2 = \delta_{\mathrm{sc}}^2 + \delta_{\mathrm{p}}^2 + \delta_{\mathrm{st}}^2 + \delta_{\mathrm{n}}^2, \tag{4}$$

где $\delta_{\mathrm{sc}}^2$ – собственная разрешающая способность сцинтиллятора, $\delta_{\mathrm{p}}^2$ – вклад, связанный со сбором света фотоумножителем или фотодиодом, $\delta_{\mathrm{st}}^2$ – вклад статистических процессов умножения электронов в фотоумножителе или флуктуационных процессов в фотодиоде, и $\delta_{\mathrm{n}}^2$ – вклад электронных шумов. В работе [3], приведена формула только для вклада статистических процессов умножения электронов в фотоумножителе

$$\delta_{\mathrm{st}} = 2.35\sqrt{(1+\varepsilon)/N}, \tag{5}$$

где $N$ – число фотоэлектронов, $\varepsilon$ – относительная дисперсия коэффициента умножения фотоумножителя.

Подобная формула для энергетического разрешения сцинтилляционных спектрометров дана в работе [4]

$$R^2 = R_{\mathrm{np}}^2 + R_{\mathrm{inh}}^2 + R_{\mathrm{tr}}^2 + R_{\mathrm{lim}}^2, \tag{6}$$

где $R_{\mathrm{np}}^2$ – вклад, связанный с непропорциональностью световыхода, $R_{\mathrm{inh}}^2$ – вклад, связанный с неоднородностью кристалла сцинтиллятора, $R_{\mathrm{tr}}^2$ – вклад, связанный со сбором света на фотокатод фотоумножителя, $R_{\mathrm{lim}}^2$ предельное разрешение сцинтилляционного детектора. В работе [4] приведена только формула для предельного разрешения сцинтилляционного детектора, которая совпадает с формулой для статистических процессов умножения электронов в фотоумножителе (5).

В классической книге [5], приведена формула для энергетического разрешения сцинтилляционного спектрометра

$$\begin{gathered}(\mathrm{FWHM})_{\mathrm{overall}}^2 = (\mathrm{FWHM})_{\mathrm{statistical}}^2 + \\ + (\mathrm{FWHM})_{\mathrm{noise}}^2 + (\mathrm{FWHM})_{\mathrm{drift}}^2 + \ldots,\end{gathered} \tag{7}$$

в которой возможные вклады в энергетическое разрешение только упомянуты, без приведения конкретных формул.

В книге [6], посвященной детекторам элементарных частиц, приведена формула для энергетического разрешения сцинтилляционных спектрометров

$$\frac{\sigma_{E_{\mathrm{dep}}}}{E_{\mathrm{dep}}} = \sqrt{\frac{f}{N_{\mathrm{pe}}} + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{e}}}{E_{\mathrm{dep}}}\right)^2 + \Delta^2}, \tag{8}$$

где $N_{\mathrm{pe}}$ – число фотоэлектронов; $f$ – избыточный фактор шума; $\sigma_{\mathrm{e}}$ – вклад шума электроники;

$\Delta$ – вклад, связанный с непропорциональностью световыхода сцинтиллятора.

В работах [7, 8], авторы попытались объяснить вклад непропорциональности световыхода в сцинтилляторе в энергетическое разрешение, разделив вклады от ионизационных потерь и от дельта-электронов. Однако в результате авторы суммировали относительные дисперсии вкладов, таким образом, аннулировав все свои усилия, поскольку такой подход является неправильным.

В работе [9], авторы, в результате анализа факторов, влияющих на энергетическое разрешение, привели формулу, которая, с их точки зрения, учитывает все вклады, определяющие энергетическое разрешение сцинтилляционного детектора

$$R_{\text{int}} = \\ = 2.355\sqrt{\frac{F_{\text{eh}}}{\langle N_{\text{eh}}\rangle} + \frac{F_{\text{ph}}}{\langle N_{\text{ph}}\rangle} + \frac{1+\varepsilon}{\langle N_{\text{pe}}\rangle} + \sigma^2_{\text{inhom}} + \sigma^2_{\text{track}}}, \quad (9)$$

причем авторы, помимо фактора Фано для электронно-дырочных пар $F_{\text{eh}}$, ввели в рассмотрение фактор Фано для световых фотонов $F_{\text{ph}}$.

Еще раз отметим неоднозначность вкладов в энергетическое разрешение сцинтилляционных спектрометров различными авторами и отсутствие информации о связи соответствующих вкладов с характеристиками сцинтиллятора, интерфейса сцинтиллятор–фотодетектор, характеристик фотодетектора и характеристик электроники спектрометра.

Анализ недостатков всех существующих работ, посвященных энергетическому разрешению сцинтилляционных спектрометров с одним фотодетектором, проведен в работе [10], и основных выводов мы кратко коснемся в разделе 7.

В единственной работе [11] получено выражение для энергетического разрешения и коэффициента корреляции между сигналами двух фотоумножителей сцинтилляционного спектрометра. В своей математической модели авторы считали, что поглощенный гамма-квант с энергией $E$ образует в сцинтилляционном кристалле случайное число световых фотонов $N$, которые, в свою очередь, производят случайное число фотоэлектронов $n$ в фотодетекторе спектрометра. Авторы ввели два фактора Фано – фактор Фано для сцинтилляционных фотонов

$$F_N = \sigma_N^2 / \langle N \rangle, \quad (10)$$

и фактор Фано для фотоэлектронов

$$F_n = \sigma_n^2 / \langle n \rangle, \quad (11)$$

где $\langle N \rangle$ и $\sigma_N^2$ – среднее число и дисперсия числа сцинтилляционных фотонов, генерируемых гамма-квантом; $\langle n \rangle$ и $\sigma_n^2$ – среднее число и дисперсия числа фотоэлектронов, образуемых сцинтилляционными фотонами в фотоприемнике. Авторы привели соотношение между средним числом фотоэлектронов и сцинтилляционных фотонов

$$\langle n \rangle = \langle N \rangle \eta, \quad (12)$$

где $\eta$ – вероятность превращения фотона в фотоэлектрон в фотоприемнике; соотношение между факторами Фано

$$F_n = 1 + \eta(F_N - 1); \quad (13)$$

и матрицу ковариации для числа фотоэлектронов на фотокатодах двух фотоумножителей

$$K_{ij}^{(n)} = \langle N \rangle \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_1^2(F_N - 1) & \eta_1\eta_2(F_N - 1) \\ \eta_1\eta_2(F_N - 1) & \eta_2 + \eta_2^2(F_N - 1) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

С учетом среднего значения $\langle G_j \rangle$ и относительной дисперсии $\alpha_j = \text{var}(G_j)/\langle G_j \rangle^2$ коэффициента умножения фотоумножителя, и связи сигналов со средним числом световых фотонов $\langle s_j \rangle = \eta_j \langle G_j \rangle \langle N \rangle$, элементы матрицы ковариации для сигналов двух фотоумножителей были приведены к виду

$$K_{jj}^{(s)} = \frac{\langle s_j \rangle^2}{\eta_j \langle N \rangle}[1 + \alpha + \eta(F_N - 1)], \quad (15)$$

$$K_{ij}^{(s)} = \frac{\langle s_i \rangle \langle s_j \rangle}{\langle N \rangle}(F_N - 1). \quad (16)$$

В результате авторы получили выражение для коэффициента корреляции сигналов фотоумножителей для симметричного случая

$$r_{12} = \frac{K_{12}^{(s)}}{\sqrt{K_{11}^{(s)} K_{22}^{(s)}}} = \frac{\eta(F_N - 1)}{1 + \alpha + \eta(F_N - 1)}, \quad (17)$$

и связь фактора Фано для световых фотонов с коэффициентом корреляции сигналов фотоумножителей

$$\hat{F}_N = 1 + \frac{\hat{r}_{12}}{1 - \hat{r}_{12}} \frac{1 + \alpha}{\eta}, \quad (18)$$

где знак каре над символом означает статистическую оценку соответствующей величины.

Из своих экспериментальных данных, авторы в работе [11] получили для фактора Фано для световых фотонов в сцинтилляторе $LaBr_3$:Ce значение $F_N = 0.10 \pm 0.16$ в спектрометре с фотоумножителями Hamamatsu R6233-100, и значение $F_N = 0.09 \pm 0.20$ в спектрометре с фотоумножителями Hamamatsu R7600U-200, подтвердив эти значения в своей следующей статье [12]. Это дало им основание объявить об открытии субпуассоновской статистики для световых фотонов в сцинтилляторах. Не останавливаясь на погрешностях их экспериментальных данных, на которые я обратил их внимание в работе [13], я объяснил ошибочное введение фактора Фано для световых фотонов в работе [14], и приведу аргументы в разд. 7.

Главный недостаток всех существующих работ заключается в возможности введения различных слагаемых в формулу для энергетического разрешения сцинтилляционных спектрометров, как правило, не давая определенных формул для их связи с характеристиками сцинтилляционного спектрометра. Однако, такое введение различных вкладов “руками” является не только неправильным, но также и контрпродуктивным, поскольку не позволяет сравнивать результаты, полученные различными научными группами.

Правильный подход к получению формулы для энергетического разрешения сцинтилляционных спектрометров заключается в создании теоретической модели, которая включает все возможные процессы, происходящие при превращении энергии регистрируемой частицы в выходной сигнал сцинтилляционного спектрометра. Только после создания теоретической модели, она, используя соответствующий формализм, должна быть переведена в соответствующую математическую форму. Так как процесс превращения энергии регистрируемой частицы в выходной сигнал сцинтилляционного детектора является ветвящимся каскадным случайным процессом, то для его математического описания должен использоваться формализм производящих функций вероятности (ПФВ). Только в этом случае, формулы для любых моментов функции распределения выходного сигнала будут строго следовать из теории. В соответствии с теоретической моделью, эти формулы будут содержать всю информацию о зависимостях всех вкладов в энергетическое разрешение от характеристик сцинтиллятора, интерфейса сцинтиллятор-фотодетектор, характеристик фотодетектора, и характеристик электроники сцинтилляционного спектрометра. Только такая формула будет обладать предсказательной способностью. Следует подчеркнуть, что любое изменение в теории возможно только на этапе формулирования теоретической модели, так как математический формализм впоследствии гарантирует получение всех необходимых формул. Только после получения формул для моментов функции распределения выходного сигнала, можно делать необходимые приближения, учитывающие условия эксперимента, при которых из характеристик выходного сигнала можно извлечь информацию об особенностях процессов, происходящих в детекторе при регистрации излучения.

## 3. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕГИСТРАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫМ ДЕТЕКТОРОМ С НЕСКОЛЬКИМИ ФОТОДЕТЕКТОРАМИ

Главный недостаток теории Брайтенбергера, и всех последующих работ, состоит в том, что они являются макроскопическими теориями, учитывающими ветвящиеся каскадные процессы через моменты функций распределения, которые являются средними значениями соответствующих этапов. Микроскопическая теория ветвящихся каскадных случайных процессов была разработана в теории ливневых спектрометров [15] и опубликована в работах [16, 17].

В работе [18], была сформулирована математическая модель регистрации первичной частицы сцинтилляционным спектрометром с несколькими фотодетекторами. Математическая модель учитывает, что процесс преобразования энергии первичной частицы в выходные сигналы фотодетекторов, которые мы пронумеруем индексом $n$, $(n = \overline{1, N})$, включает следующие последовательные этапы.

### *1. Этап взаимодействия первичной моноэнергетической частицы со сцинтилляционным кристаллом*

Разобьем координатное пространство на элементы объема $\Delta V_i$ $(i = \overline{1, I})$, которые принадлежат объему сцинтилляционного кристалла $V$ , и $\Delta V_0$ – элемент объема, объединяющий пространство, не принадлежащее объему сцинтилляционного кристалла.

Первичная моноэнергетическая частица с энергией $E_0$, взаимодействуя со сцинтилляционным кристаллом, производит в элементах объема $\Delta V_i$, $(i = \overline{1, I})$ вторичные частицы типа $\alpha$, $(\alpha = \overline{1, A})$, где индекс $\alpha$ определяет вторичные частицы: фотоны, электроны, позитроны, фононы, и может включать протоны, если первичными частицами являются протоны или нейтроны, и альфа-частицы, если первичными частицами являются альфа-частицы. Разобьем диапазон возможных энергий вторичных частиц на энергетические интервалы $\Delta E_j$ $(j = \overline{1, J})$, а пространство возможных направлений вторичных частиц на элементы телесного угла $\Delta\Omega_k$ $(k = \overline{1, K})$.

Введем $AIJK$ -мерный случайный вектор $\{N_{\alpha ijk}\}$, компоненты которого $N_{\alpha ijk}$ представляют число вторичных частиц типа $\alpha$, принадлежащих элементу фазового пространства $\Delta\Gamma_{ijk} = \Delta V_i \Delta E_j \Delta\Omega_k$. Введем вероятности $p^c_{\alpha ijk}$ всевозможных комбинаций компонентов случайного вектора $\{N^c_{\alpha ijk}\}$, которые характеризуют всевозможные распределения вторичных частиц в элементах фазового пространства после окончания всех процессов преобразования энергии первичной частицы в энергию вторичных частиц.

### *2. Этап генерации электронно-дырочных пар*

Свойства сцинтиллятора определяются его кристаллической структурой, которая для неорганических сцинтилляторов является структурой полупроводника. Поэтому излучение сцинтилляционных фотонов происходит в результате последовательных процессов, первым из которых является процесс генерации электронно-дырочных пар вторичными частицами. Введем производящую функцию числа электронно-дырочных пар $f_{\nu_{\alpha ijk}}[s]$, генерируемых вторичной частицей типа $\alpha$, принадлежащей элементу фазового пространства $\Delta\Gamma_{ijk}$. Здесь и далее $s$ обозначает вспомогательную переменную производящих функций вероятности. В полупроводниковом кристалле генерировать электронно-дырочные пары могут только заряженные вторичные частицы с энергиями, большими пороговой энергии $E_{\alpha ij_{\min}k}$, которая в общем случае может зависеть от типа вторичной частицы, ее энергии и направления движения, а также от пространственной координаты в объеме сцинтилляционного кристалла. Это обстоятельство можно учесть, считая, что среднее значение $\langle\nu_{\alpha ijk}\rangle$ и дисперсия $\sigma^2_{\nu_{\alpha ijk}}$ числа генерируемых электронно-дырочных пар равны нулю для вторичных заряженных частиц с энергиями ниже пороговой энергии, т.е. для $j \le j_{\alpha\ \min}$.

Несмотря на различие механизмов сцинтилляций в различных неорганических сцинтилляторах, в итоге, выжившие в результате рекомбинации электроны и дырки или образовавшиеся экситоны диффундируют и активируют центры люминесценции. В соответствие с данной моделью, активация центров люминесценции содержит следующие последовательные этапы.

### *3. Этап рекомбинации электронно-дырочных пар*

Этот этап характеризуется вероятностью электронно-дырочной паре, образованной в элементе объема $\Delta V_i$, выжить в результате процесса рекомбинации или образовать экситон $\varepsilon_{r\ \alpha ijk}$. Эта вероятность сильно зависит от плотности ионизации производимой вторичной частицей типа $\alpha$, принадлежащей элементу фазового пространства $\Delta\Gamma_{ijk}$. Этап рекомбинации описывается биномиальным распределением с ПФВ

$$f_{r\ \alpha ijk}\ [s] = 1 - \varepsilon_{r\ \alpha ijk} + \varepsilon_{r\ \alpha ijk} s. \qquad (19)$$

### *4. Этап диффузии носителей в сцинтилляторе*

Этот этап также описывается биномиальным распределением с ПФВ

$$f_{D\ ii'}\ [s] = 1 - p_{D\ ii'} + p_{D\ ii'} s, \qquad (20)$$

где $p_{D\ ii'}$ — вероятность диффузии носителя из элемента объема $\Delta V_i$ в элемент объема $\Delta V_{i'}$, $(i' = \overline{1, I})$.

### *5. Этап активации люминесцентных центров*

Этот этап характеризуется вероятностью $\varepsilon_{a\ i'}$ активации люминесцентного центра в элементе объема $\Delta V_{i'}$, и описывается биномиальным распределением с ПФВ

$$f_{ai'}[s] = 1 - \varepsilon_{ai'} + \varepsilon_{ai'} s. \qquad (21)$$

### *6. Этап эмиссии светового фотона люминесцентным центром*

Из-за случайного пространственного распределения люминесцентных центров в сцинтилляционном кристалле энергетические уровни каждого люминесцентного центра испытывают различные штарковские сдвиги, обусловленные результирующим электрическим полем окружающих ионов. Поэтому число световых фотонов в каждой элементарной излучательной моде много меньше единицы, и мы можем считать, что фотоны испускаются люминесцентными центрами независимо. В этом случае, процесс излучения фотона люминесцентным центром, принадлежащим элементу объема $\Delta V_{i'}$, описывается биномиальным распределением с ПФВ

$$f_e[s] = 1 - \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{k'=1}^{K'} \varepsilon_{ei'lk'} + \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{k'=1}^{K'} \varepsilon_{ei'lk'} s, \qquad (22)$$

где $\varepsilon_{ei'lk'}$ — вероятность того, что в результате квантового перехода будет излучен световой фотон с длиной волны $\lambda_l$, $(l = \overline{1, L})$, распространяющийся в элементе телесного угла $\Delta\Omega_{k'}$ $(k' = \overline{1, K'})$. В формуле (22), $p_l$— вероятность $l$-го квантового перехода $\left(\sum_{l=1}^{L} p_l = 1\right)$.

### *7. Этап светосбора светового фотона на фотокатод фотодетектора*

Фундаментальный характер неделимости светового фотона требует, чтобы он был зарегистрирован только одним из фотодетекторов. Введем $\tau_{ni'lk'mk''}$– вероятность фотона с длиной волны $\lambda_l$, испускаемого в элементе телесного угла $\Delta\Omega_{k'}$ люминесцентным центром из элемента объема $\Delta V_{i'}$, достичь элемент поверхности $\Delta S_m$, $(m = \overline{1, M})$ входного окна $n$-го фотодетектора в направлении, принадлежащем элементу телесного угла $\Delta\Omega_{k''}$, $(k'' = \overline{1, K''})$ относительно нормали к элементу поверхности фотокатода. ПФВ этого процесса будет описываться биномиальным распределением

$$f_\tau\ [\{s_n\}] = 1 - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k''=1}^{K''}\tau_{ni'lk'mk''} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k''=1}^{K''}\tau_{ni'lk'mk''}s_n, \tag{23}$$

где $\{s_n\}$ — вспомогательные переменные фотодетекторов.

*8. Этап преобразования светового фотона в фотоэлектрон*

Этот этап описывается биномиальным распределением с ПФВ

$$f_{\eta\, n}\ [s_n] = 1 - \eta_{nlmk''} + \eta_{nlmk''}s_n, \tag{24}$$

где $\eta_{nlmk''}$ квантовая эффективность элемента поверхности $\Delta S_m$ $n$-го фотодетектора к световому фотону с длиной волны $\lambda_l$, пересекающему входное окно в направлении, принадлежащем элементу телесного угла $\Delta\Omega_{k''}$.

Так как процессы последовательных этапов 3—8 описываются биномиальными распределениями, то составной каскадный процесс будет также биноминальным с ПФВ

$$f_\chi\ [\{s_n\}] = 1 - \sum_{n=1}^{N}\chi_{n\alpha ijk} + \sum_{n=1}^{N}\chi_{n\alpha ijk}s_n, \tag{25}$$

где

$$\chi_{n\alpha ijk} = \varepsilon_{r\alpha ijk}\sum_{i'=1}^{I}p_{Dii'} \times \sum_{l=1}^{L}p_l\sum_{k'=1}^{K'}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k''=1}^{K''}\varepsilon_{ai'}\varepsilon_{ei'lk'}\tau_{ni'lk'mk''}\eta_{nlmk''} \tag{26}$$

— вероятность образования фотоэлектрона в $n$-м фотодетекторе вторичной частицей типа $\alpha$, принадлежащей элементу фазового пространства $\Delta\Gamma_{ijk}$.

*9. Этап усиления сигнала n-го фотодетектора электронным усилителем, с учетом электронных шумов на его выходе*

Введем ПФВ усиления сигнала электроникой $n$-го фотодетектора $f_{\mathrm{g}\,n}[s_n]$, $(n = \overline{1,N})$ со средним значением коэффициента усиления $\langle g_n\rangle$ и дисперсией $\sigma^2_{g\,n}$. Введем также ПФВ электронных шумов на выходе усилителя $n$-го фотодетектора $f_{\mathrm{noise}\,n}[s_n]$, $(n = \overline{1,N})$ с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma^2_{\mathrm{noise}\,n}$.

Следует отметить, что данная математическая модель применима не только к неорганическим сцинтилляторам, но также и к органическим сцинтилляторам, если учесть, что этап генерации электронно-дырочных пар соответствует этапу ионизации и возбуждения органических молекул; этап рекомбинации электронно-дырочных пар — этапу “тушения” люминесценции; этап диффузии носителей — этапу миграции энергии возбуждения к другим молекулам; этап активации люминесцентного центра — этапу перехода энергии возбуждения соответствующему радиационному переходу; этап эмиссии светового фотона люминесцентным центром — этапу радиационного перехода с эмиссией светового фотона.

Для описанного выше ветвящегося каскадного случайного процесса преобразования энергии первичной частицы в выходные сигналы фотодетекторов сцинтилляционного спектрометра производящая функция вероятности имеет вид

$$f_{\{Q_n\}}[\{s_n\}] = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\prod_{\alpha=1}^{A}\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=j_{\min}}^{J}\prod_{k=1}^{K}\left(f_{\nu_{\alpha ijk}}\left[1 - \sum_{n=1}^{N}\chi_{n\alpha ijk} + \sum_{n=1}^{N}\chi_{n\alpha ijk}f_{\mathrm{g}\,n}[s_n]\right]\right)^{N^c_{\alpha ijk}}\prod_{n=1}^{N}f_{\mathrm{noise}\,n}[s_n] \tag{27}$$

где выходные сигналы фотодетекторов $Q_n$ выражены в единицах заряда электрона. В ПФВ (27), учитывается, что генерация электронно-дырочных пар производится только заряженными вторичными частицами типа $\alpha$ $(\alpha = \overline{1,A})$, с энергиями, большими пороговой энергии $E_{\alpha ij_{\min}k}$.

Из производящей функции вероятности (27), среднее значение и дисперсия сигнала $n$-го фотодетектора имеют вид

$$\langle Q_n\rangle = \left.\frac{\partial f_{\{Q_n\}}[\{s_n\}]}{\partial s_n}\right|_{\{s_n=1\}} = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}N^c_{\alpha ijk}\langle\nu_{\alpha ijk}\rangle\chi_{n\alpha ijk}\langle g_n\rangle, \tag{28}$$

$$\sigma^2_{Q_n} = \left.\frac{\partial^2 f_{\{Q_n\}}[\{s_n\}]}{\partial s_n^2}\right|_{\{s_n=1\}} + \left.\frac{\partial f_{\{Q_n\}}[\{s_n\}]}{\partial s_n}\right|_{\{s_n=1\}} - \left(\left.\frac{\partial f_{\{Q_n\}}[\{s_n\}]}{\partial s_n}\right|_{\{s_n=1\}}\right)^2 = \sigma^2_{\mathrm{cov}\,n} + \sigma^2_{\mathrm{pair}\,n} + \sigma^2_{\mathrm{tr}\,n} + \sigma^2_{\mathrm{gain}\,n} + \sigma^2_{\mathrm{noise}\,n}, \tag{29}$$

В формуле (29),

$$\begin{gathered}\sigma^2_{\mathrm{cov}\,n} = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk\alpha' i' j' k'}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\left\langle \nu_{\alpha ijk}\right\rangle \chi_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle \times \\ \times \sum_{\alpha'=1}^{A}\sum_{i'=1}^{I}\sum_{j'=1}^{J}\sum_{k'=1}^{K} N^c_{\alpha' i' j' k'}\left\langle \nu_{\alpha' i' j' k'}\right\rangle \chi_{n\alpha' i' j' k'}\left\langle g_n\right\rangle - \\ - \left(\lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\left\langle \nu_{\alpha ijk}\right\rangle \chi_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle\right) \times \\ \times \left(\lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha' i' j' k'}\sum_{\alpha'=1}^{A}\sum_{i'=1}^{I}\sum_{j'=1}^{J}\sum_{k'=1}^{K} N^c_{\alpha' i' j' k'}\left\langle \nu_{\alpha' i' j' k'}\right\rangle \chi_{n\,\alpha' i' j' k'}\left\langle g_n\right\rangle\right)\end{gathered} \tag{30}$$

— дисперсия сигнала $n$-го фотодетектора, обусловленная ковариациями вторичных частиц в фазовом пространстве, где $p^c_{\alpha ijk\alpha' i' j' k'}$ — совместная функция распределения всевозможных комбинаций вторичных частиц в фазовом пространстве.

$$\begin{gathered}\sigma^2_{\mathrm{pair}\,n} = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\sigma^2_{\nu_{\alpha ijk}}\chi^2_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle^2 = \\ = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}F_{\alpha ijk}\left\langle \nu_{\alpha ijk}\right\rangle \chi^2_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle^2\end{gathered} \tag{31}$$

— дисперсия сигнала $n$-го фотодетектора, обусловленная флуктуациями числа электронно-дырочных пар. В формуле (31), в соответствии с моделью Фано, считается, что флуктуации числа электронно-дырочных пар пропорциональны их среднему числу

$$\sigma^2_{\nu_{\alpha ijk}} = F_{\alpha ijk}\left\langle \nu_{\alpha ijk}\right\rangle, \tag{32}$$

где $F_{\alpha ijk}$ — фактор Фано.

$$\sigma^2_{tr\ n} = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\left\langle \nu_{\alpha ijk}\right\rangle \chi_{n\,\alpha ijk}(1-\chi_{n\,\alpha ijk})\left\langle g_n\right\rangle^2 \tag{33}$$

— дисперсия сигнала $n$-го фотодетектора, обусловленная флуктуациями числа фотоэлектронов.

$$\sigma^2_{gain\ n} = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\left\langle \nu_{\alpha ijk}\right\rangle \chi_{n\,\alpha ijk}\sigma^2_{g\ n} \tag{34}$$

— дисперсия сигнала $n$-го фотодетектора, обусловленная флуктуациями коэффициента усиления; $\sigma^2_{\mathrm{noise}\,n}$ — дисперсия сигнала, обусловленная шумами $n$-го фотодетектора и электроники.

## 4. ПЕРЕХОД К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПОГЛОЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ В ОБЪЕМЕ СЦИНТИЛЛЯТОРА.

Так как среднее число электронно-дырочных пар определяется поглощенной энергией, то удобно перейти от распределения частиц к распределению поглощенной энергии следующим образом

$$N^c_{\alpha ijk}\left\langle \nu_{\alpha ijk}\right\rangle = W^c_{\alpha ijk}/\varepsilon_{\mathrm{e-h}\,\alpha ijk}, \tag{35}$$

где $W^c_{\alpha ijk}$ – энергия, поглощенная в элементе объема $\Delta V_i$ при появлении в нем $N^c_{\alpha ijk}$ вторичных частиц типа $\alpha$, принадлежащих элементу фазового пространства $\Delta\Gamma_{ijk}$, $\varepsilon_{\mathrm{e-h}\,\alpha ijk}$ — средняя энергия образования электронно-дырочной пары.

Для каждой из возможных комбинаций потерь энергии вторичных частиц во всем пространстве полная поглощенная энергия равна энергии первичной частицы $E_0$

$$\lim_{IJK\to\infty}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}W_{\alpha ijk}^{c}=E_0. \tag{36}$$

Любой детектор обычно характеризуется энергетическим разрешением пика полного поглощения, когда вся энергия моноэнергетической первичной частицы $E_0$ поглощается в объеме детектора

$$\begin{aligned}&\lim_{IJK\to\infty}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}W_{\alpha ijk}^{c}=\\&=\sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}\frac{\partial^3W_\alpha^c(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\partial V\partial E\partial\mathbf{\Omega}}=\\&=\sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}w_\alpha^c(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})=E_0,\end{aligned} \tag{37}$$

где $w_\alpha^c(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})$ – дифференциальная плотность поглощенной энергии в объеме сцинтиллятора при появлении определенной конфигурации вторичных частиц типа $\alpha$ в элементах фазового пространства.

Для случая, когда первичные моноэнергетические частицы с энергией $E_0$ полностью поглощаются в объеме детектора, выражение для среднего значения сигнала $n$-го фотодетектора имеет вид

$$\begin{aligned}\langle Q_n(E_0)\rangle&=\sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}\,u(E-E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))\times\\&\times\left\langle\frac{w_\alpha^c(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\mathrm{e-h}\ \alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D\right\rangle_c\langle g_n\rangle,\end{aligned} \tag{38}$$

где $u(x)$ – единичная функция Хевисайда ($u(x)=0$ для $x<0$ и $u(x)=1$ для $x\geq 0$), которая учитывает порог генерации электронно-дырочных пар; $\varepsilon_{\mathrm{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})$ – средняя энергия образования электронно-дырочной пары в точке $\mathbf{r}$ вторичной заряженной частицей типа $\alpha$ с энергией $E$, движущейся в направлении $\mathbf{\Omega}$. Индекс $c$ при угловых скобках обозначает усреднение по всевозможным распределениям вторичных частиц по элементам фазового пространства.

В формуле (38),

$$\begin{aligned}\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D&=\int_V dV'\rho_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\sum_{l=1}^{L}p_l(\lambda_l)\times\\&\times\int_{\Omega'}d\mathbf{\Omega}'\varepsilon_{r\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\varepsilon_a(\mathbf{r}')\varepsilon_e(\mathbf{r}',\lambda_l,\mathbf{\Omega}')\times\\&\times\int_S\int_{\Omega''}dSd\mathbf{\Omega}''\tau_n(\mathbf{r}',\lambda_l,\mathbf{\Omega}',S,\mathbf{\Omega}'')\eta_n(\lambda_l,S,\mathbf{\Omega}''),\end{aligned} \tag{39}$$

где индекс $D$ обозначает усреднение по плотности вероятности диффузии носителей, представляет собой вероятность образования фотоэлектрона в $n$-м фотодетекторе электронно-дырочной парой, образованной в точке $\mathbf{r}$ вторичной частицей типа $\alpha$ с энергией $E$, движущейся в направлении $\mathbf{\Omega}$.

В однородном сцинтилляторе диффузия носителей обладает сферической симметрией. В этом случае, плотность вероятности обнаружить носитель, образованный в точке $\mathbf{r}$, в точке сцинтиллятора $\mathbf{r}'$ зависит только от расстояния между ними, и определяется гауссовым распределением

$$\begin{aligned}&\rho_D(\mathbf{r}',\mathbf{r})=\rho_D(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|)=\\&=(\sqrt{4\pi}\lambda_D)^{-3}\exp\left(-(\mathbf{r}'-\mathbf{r})^2/4\lambda_D^2\right)\end{aligned} \tag{40}$$

с характерной длиной диффузии

$$\lambda_D=\sqrt{D\tau}, \tag{41}$$

где $D$ – эффективный коэффициент диффузии носителей, $\tau$ – среднее время их жизни.

Разложение коэффициента (39) в ряд Тейлора, с точностью до второго порядка малости по смещению $\mathbf{r}'-\mathbf{r}$, имеет вид

$$\begin{aligned}\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r}',E,\mathbf{\Omega})&=\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})+((\mathbf{r}'-\mathbf{r})\nabla)\times\\&\times\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})+\frac{1}{2!}((\mathbf{r}'-\mathbf{r})\nabla)^2\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}).\end{aligned} \tag{42}$$

Вследствие изотропии, при усреднении по плотности вероятности диффузии (40) линейный член в формуле (42) обращается в нуль, а член второго порядка принимает вид

$$\begin{aligned}&\left\langle\frac{1}{2!}((\mathbf{r}'-\mathbf{r})\nabla)^2\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\right\rangle_D=\frac{1}{2}\left\langle\sum_{i,i'=1}^{3}\left(\xi_i'-\xi_i\right)\frac{\partial^2\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\partial\xi_i\partial\xi_i'}\Big|_{\xi_i,\xi_i'=x,y,z}\left(\xi_{i'}'-\xi_{i'}\right)\right\rangle_D=\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\partial\xi_i^2}\Big|_{\xi_i=x,y,z}\left\langle\left(\xi_i'-\xi_i\right)^2\right\rangle_D=\frac{1}{6}\Delta\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\left\langle(\mathbf{r}'-\mathbf{r})^2\right\rangle_D=\Delta\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\lambda_D^2,\end{aligned} \tag{43}$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа. В результате, вероятность образования фотоэлектрона в $n$-м фотодетекторе принимает вид

$$\langle \chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D = \chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}) + \Delta\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\lambda_D^2 = (1+\lambda_D^2\Delta)\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}) =$$
$$= \sum_{l=1}^{L} p_l(\lambda_l)(1+\lambda_D^2\Delta)\int_{\Omega'} d\mathbf{\Omega}'\varepsilon_{r\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\varepsilon_a(\mathbf{r})\varepsilon_e(\mathbf{r},\lambda_l,\mathbf{\Omega}')\int_S\int_{\Omega''} dSd\mathbf{\Omega}''\tau_n(\mathbf{r},\lambda_l,\mathbf{\Omega}',S,\mathbf{\Omega}'')\eta_n(\lambda_l,S,\mathbf{\Omega}''). \quad (44)$$

При переходе к поглощенной энергии вклады в дисперсию выходного сигнала определяются выражениями

$$\sigma^2_{\mathrm{cov}\;n} = \sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{\alpha'=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega\int_{V'}\int_{E'}\int_{\Omega'} dVdEd\mathbf{\Omega}dV'dE'd\mathbf{\Omega}'\,u(E-E_{\alpha\min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))u(E'-E_{\alpha'\min}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}'))\times$$
$$\times\left\langle \frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\mathrm{e-h}\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\langle\chi_{n\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D \frac{w^c_{\alpha'}(E_0,\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')}{\varepsilon_{\mathrm{e-h}\alpha'}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')}\langle\chi_{n\,\alpha'}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')\rangle_D\right\rangle_c \langle g_n\rangle^2 - \quad (45)$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}u(E-E_{\alpha\min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))\left\langle \frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\mathrm{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D\right\rangle_c^2 \langle g_n\rangle^2,$$

$$\sigma^2_{\mathrm{pair}\,n} = \sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}u(E-E_{\alpha\min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))\left\langle F_\alpha(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\mathrm{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D^2\right\rangle_c \langle g_n\rangle^2, \quad (46)$$

$$\sigma^2_{\mathrm{tr}\,n} = E_0\sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}u(E-E_{\alpha\min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))\left\langle \frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\mathrm{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D\left(1-\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D\right)\right\rangle_c \langle g_n\rangle^2, \quad (47)$$

$$\sigma^2_{\mathrm{gain}\,n} = E_0\sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}u(E-E_{\alpha\min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))\left\langle \frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\mathrm{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\langle\chi_{n\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\rangle_D\right\rangle_c \sigma^2_{g\,n}. \quad (48)$$

Если мы положим в производящей функции вероятности (27) $\{s_n = s\}$, $(n=\overline{1,N})$, то получим ПФВ суммарного сигнала фотодетекторов сцинтилляционного спектрометра

$$f_Q[s] = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\prod_{\alpha=1}^{A}\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=j_{\min}}^{J}\prod_{k=1}^{K}\left(f_{\nu_{\alpha ijk}}\left[1-\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}+\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}f_{\mathrm{g}\,n}[s]\right]\right)^{N^c_{\alpha ijk}}\prod_{n=1}^{N}f_{\mathrm{noise}\,n}[s]. \quad (49)$$

Из ПФВ (49), среднее значение и дисперсия суммарного сигнала будут иметь вид

$$\langle Q(E_0)\rangle = \left.\frac{\partial f_Q[s]}{\partial s}\right|_{s=1} = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}N^c_{\alpha ijk}\langle\nu_{\alpha ijk}\rangle\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}\langle g_n\rangle, \quad (50)$$

$$\sigma^2_Q(E_0) = \left.\frac{\partial f^2_Q[s]}{\partial s^2}\right|_{s=1} + \left.\frac{\partial f_Q[s]}{\partial s}\right|_{s=1} - \left(\left.\frac{\partial f_Q[s]}{\partial s}\right|_{s=1}\right)^2 = \sigma^2_{\mathrm{cov}} + \sigma^2_{\mathrm{pair}} + \sigma^2_{\mathrm{tr}} + \sigma^2_{\mathrm{gain}} + \sigma^2_{\mathrm{noise}}, \quad (51)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\text{cov}} &= \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk\alpha' i' j' k'}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\left\langle\nu_{\alpha ijk}\right\rangle\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle\times\\ &\times\sum_{\alpha'=1}^{A}\sum_{i'=1}^{I}\sum_{j'=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha' i' j' k'}\left\langle\nu_{\alpha' i' j' k'}\right\rangle\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha' i' j' k'}\left\langle g_n\right\rangle-\\ &-\left(\lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\left\langle\nu_{\alpha ijk}\right\rangle\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle\right)\times\\ &\times\left(\lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha' i' j' k'}\sum_{\alpha'=1}^{A}\sum_{i'=1}^{I}\sum_{j'=1}^{J}\sum_{k'=1}^{K} N^c_{\alpha' i' j' k'}\left\langle\nu_{\alpha' i' j' k'}\right\rangle\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha' i' j' k'}\left\langle g_n\right\rangle\right),\end{aligned}\tag{52}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\text{pair}} &= \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\sigma^2_{\nu_{\alpha ijk}}\left(\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle\right)^2=\\ &=\lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}F_{\alpha ijk}\left\langle\nu_{\alpha ijk}\right\rangle\left(\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle\right)^2,\end{aligned}\tag{53}$$

$$\sigma^2_{\text{tr}} = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\left\langle\nu_{\alpha ijk}\right\rangle\left(\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle^2-\left(\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}\left\langle g_n\right\rangle\right)^2\right),\tag{54}$$

$$\sigma^2_{gain} = \lim_{IJK\to\infty}\sum_c p^c_{\alpha ijk}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk}\left\langle\nu_{\alpha ijk}\right\rangle\sum_{n=1}^{N}\chi_{n\,\alpha ijk}\sigma^2_{g\,n},\tag{55}$$

$$\sigma^2_{\text{noise}} = \sum_{n=1}^{N}\sigma^2_{\text{noise}\,n}.\tag{56}$$

При переходе к распределению поглощенной энергии, формула для среднего значения суммарного сигнала сцинтилляционного детектора с $N$ фотодетекторами микроскопической теории имеет вид

$$\left\langle Q(E_0)\right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}u(E-E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))\left\langle\frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\sum_{n=1}^{N}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\right\rangle_D\left\langle g_n\right\rangle\right\rangle_c,\tag{57}$$

где $w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})$ – дифференциальная плотность поглощенной энергии в элементе объема детектора $dV$, при появлении определенной конфигурации вторичных частиц типа $\alpha$ в элементах фазового пространства $d\Gamma = dVdEd\mathbf{\Omega}$; $\varepsilon_{\text{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})$ – средняя энергия образования электронно-дырочной пары вторичной частицей типа $\alpha$, принадлежащей элементу фазового пространства $d\Gamma$; $\left\langle g_n\right\rangle$ – коэффициент усиления электроники $n$-го фотодетектора; $u(E-E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))$ – единичная функция Хевисайда, которая учитывает порог генерации электронно-дырочных пар вторичными частицами. Индекс $c$ при угловых скобках обозначает усреднение по всевозможным распределениям поглощенной энергии в элементах фазового пространства.

Формула для дисперсии суммарного сигнала сцинтилляционного детектора с $N$ фотодетекторами микроскопической теории имеет вид

$$\sigma^2_Q(E_0) = \sigma^2_{\text{cov}}+\sigma^2_{\text{pair}}+\sigma^2_{\text{tr}}+\sigma^2_{\text{gain}}+\sigma^2_{\text{noise}},\tag{58}$$

где

$$\sigma^2_{\text{cov}} = \sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{\alpha'=1}^{A}\int\limits_V\int\limits_E\int\limits_\Omega\int\limits_{V'}\int\limits_{E'}\int\limits_{\Omega'} dVdEd\boldsymbol{\Omega}dV'\,dE'\,d\boldsymbol{\Omega}'u(E - E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega}))u(E' - E_{\alpha'\min}(\mathbf{r}',E',\boldsymbol{\Omega}'))\times$$
$$\times\left\langle \frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\ \alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}\left(\sum_{n=1}^{N}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})\right\rangle_D\left\langle g_n\right\rangle\right)\frac{w^c_{\alpha'}(E_0,\mathbf{r}',E',\boldsymbol{\Omega}')}{\varepsilon_{\text{e-h}\ \alpha'}(\mathbf{r}',E',\boldsymbol{\Omega}')}\left(\sum_{n'=1}^{N}\left\langle\chi_{n'\alpha'}(\mathbf{r}',E',\boldsymbol{\Omega}')\right\rangle_D\left\langle g_{n'}\right\rangle\right)\right\rangle_c - \tag{59}$$
$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{A}\int\limits_V\int\limits_E\int\limits_\Omega dVdEd\boldsymbol{\Omega}u(E - E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega}))\left\langle\frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\ \alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}\left(\sum_{n=1}^{N}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})\right\rangle_D\left\langle g_n\right\rangle\right)\right\rangle_c\right)^2$$

— дисперсия суммарного сигнала спектрометра, обусловленная ковариациями вторичных частиц в фазовом пространстве;

$$\sigma^2_{\text{pair}} = \sum_{\alpha=1}^{A}\int\limits_V\int\limits_E\int\limits_\Omega dVdEd\boldsymbol{\Omega}u(E - E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega}))\times$$
$$\times\left\langle F_\alpha(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})\frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\ \alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}\times \tag{60}$$
$$\times\left(\sum_{n=1}^{N}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})\right\rangle_D\left\langle g_n\right\rangle\right)^2\right\rangle_c$$

— дисперсия суммарного сигнала спектрометра, обусловленная флуктуациями числа электронно-дырочных пар, где $F_\alpha(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})$ — фактор Фано для образования электронно-дырочных пар в точке $\mathbf{r}$ объема сцинтиллятора вторичной частицей типа $\alpha$, принадлежащей элементу фазового пространства $d\Gamma$;

$$\sigma^2_{\text{tr}} = \sum_{\alpha=1}^{A}\int\limits_V\int\limits_E\int\limits_\Omega dVdEd\boldsymbol{\Omega}u(E - E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega}))\times$$
$$\times\left\langle\frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\ \alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}\left(\sum_{n=1}^{N}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})\right\rangle_D\left\langle g_n\right\rangle^2 - \right.\right. \tag{61}$$
$$\left.\left.-\left(\sum_{n=1}^{N}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})\right\rangle_D\left\langle g_n\right\rangle\right)^2\right)\right\rangle_c$$

— дисперсия суммарного сигнала спектрометра, обусловленная флуктуациями процессов, происходящих в детекторе от образования электронно-дырочной пары в сцинтилляторе до образования фотоэлектрона в одном из фотодетекторов;

$$\sigma^2_{\text{gain}} = \sum_{\alpha=1}^{A}\int\limits_V\int\limits_E\int\limits_\Omega dVdEd\boldsymbol{\Omega}u(E - E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega}))\times$$
$$\times\left\langle\frac{w^c_\alpha(E_0,\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\ \alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})}\sum_{n=1}^{N}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})\right\rangle_D\sigma^2_{g\ n}\right\rangle_c \tag{62}$$

— дисперсия суммарного сигнала спектрометра, обусловленная флуктуациями коэффициентов усиления фотодетекторов и электронных усилителей, где $\sigma^2_{g\ n}$ — дисперсия коэффициента усиления электроники $n$-го фотодетектора;

$$\sigma^2_{\text{noise}} = \sum_{n=1}^{N}\sigma^2_{\text{noise}\ n} \tag{63}$$

— дисперсия, обусловленная шумами фотодетекторов и электроники, где $\sigma^2_{\text{noise}\ n}$ — дисперсия шумов электроники $n$-го фотодетектора.

Выражения (57)—(63) являются самыми общими формулами для среднего значения и дисперсии суммарного сигнала сцинтилляционного спектрометра с несколькими фотодетекторами и являются основой для различных приближений. Эти формулы содержат выражения для среднего значения и дисперсии суммарного сигнала любой группы фотодетекторов, если при суммировании по $n$ оставить только слагаемые, соответствующие выбранной группе фотодетекторов. В частности, эти формулы содержат выражения для среднего значения и дисперсии сигнала любого фотодетектора, если при суммировании по $n$ оставить только одно слагаемое, соответствующее выбранному фотодетектору.

## 5. АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ РЕГИСТРАЦИИ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Все существующие в литературе формулы для энергетического разрешения применимы только к сцинтилляционным спектрометрам с одним фотодетектором при регистрации моноэнергетического рентгеновского излучения низкой энергии $E_0$, когда вся энергия первичной частицы поглощается локально в точке $\mathbf{r}_c$, и вторичными частицами являются электроны. При этом считается, что люминесцентные центры осуществляют один излучающий переход. В этом случае

$$\left\langle\chi(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})\right\rangle_D = S(E)QT(\mathbf{r}), \tag{64}$$

где $S(E) = \varepsilon_r(E)\varepsilon_a$ — стандартное обозначение для вероятности активации люминесцентного центра одной электронно-дырочной парой, которая может зависеть только от тормозной способности, а, следовательно, от энергии вторичного электрона; $Q$ — квантовая эффективность процесса люминесценции $Q/4\pi = \varepsilon_e(\mathbf{r}, \lambda_l, \mathbf{\Omega}')$;

$$T(\mathbf{r}) = (1 + \lambda_D^2\Delta)\int_{\Omega'} \frac{d\mathbf{\Omega}'}{4\pi} \times \\ \times \int_S \int_{\Omega''} dSd\mathbf{\Omega}''\tau(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{\Omega}', S, \mathbf{\Omega}'')\eta(\lambda, S, \mathbf{\Omega}'') \tag{65}$$

— вероятность сцинтилляционному фотону, испущенному люминесцентным центром в точке $\mathbf{r}$ объема сцинтиллятора, образовать фотоэлектрон в фотодетекторе.

Так как обычно объем сцинтиллятора много больше объема области конверсии низкоэнергетического фотоэлектрона в энергию электронно-дырочных пар, то можно считать, что все электронно-дырочные пары образуются в точке взаимодействия рентгеновского кванта со сцинтилляционным кристаллом. В этом случае, вся энергия первичной частицы поглощается локально в точке $\mathbf{r}_c$, и дифференциальная плотность поглощенной энергии в объеме однородного и изотропного сцинтиллятора факторизуется

$$w_\alpha^c(E_0, \mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) = w^c(E_0, E)\rho^c(\mathbf{r}), \tag{66}$$

где $\rho^c(\mathbf{r})$ — плотность вероятности взаимодействия рентгеновского кванта в объеме сцинтиллятора. При этом, при усреднении по всевозможным комбинациям вторичных частиц в фазовом пространстве, усреднение по пространственной координате обусловлено пространственными флуктуациями точки взаимодействия рентгеновского кванта в объеме сцинтиллятора.

Для сравнения с существующим в литературе формулами для энергетического разрешения сцинтилляционного спектрометра с одним фотодетектором, более удобно использовать относительную дисперсию, связанную с энергетическим разрешением соотношением

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 2.36\frac{\sigma_Q(E_0)}{\langle Q(E_0)\rangle} = 2.36\eta_Q(E_0), \tag{67}$$

где $\Delta E$ — полная ширина линии с энергией $E_0$ на половине высоты (ПШПВ).

В приближении, когда вся энергия первичной частицы поглощается локально в точке $\mathbf{r}_c$, формулы микроскопической теории для среднего значения и относительной дисперсии сигнала сцинтилляционного спектрометра с одним фотодетектором принимают вид

$$\langle Q(E_0)\rangle = \left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c \langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c \langle g\rangle, \tag{68}$$

$$\eta_Q^2(E_0) = \eta_{\text{cov}}^2 + \eta_{\text{pair}}^2 + \eta_{\text{tr}}^2 + \eta_{\text{gain}}^2 + \eta_{\text{noise}}^2, \tag{69}$$

где

$$\eta_{\text{cov}}^2 = \frac{\int_E\int_{E'} dEdE'\,u(E - E_{\min})u(E' - E_{\min})\left\langle \frac{\partial Y^c(E_0, E)}{\partial E}\frac{\partial Y^c(E_0, E')}{\partial E'}\right\rangle_c \left\langle T^2(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c}{\left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c^2 \langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c^2} - 1 \tag{70}$$

— относительная дисперсия выходного сигнала спектрометра, обусловленная ковариациями вторичных частиц в фазовом пространстве;

$$\eta_{\text{pair}}^2 = \frac{\int_E dEu(E - E_{\min})\left\langle F(E)\frac{\partial Y^c(E_0, E)}{\partial E}S(E)Q\right\rangle_c \left\langle T^2(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c}{\left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c^2 \langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c^2} \tag{71}$$

— относительная дисперсия выходного сигнала спектрометра, обусловленная флуктуациями числа электронно-дырочных пар;

$$\eta_{\text{tr}}^2 = \frac{1}{\left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c \langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c} - \\ - \frac{\int_E dEu(E - E_{\min})\left\langle \frac{\partial Y^c(E_0, E)}{\partial E}S(E)Q\right\rangle_c \left\langle T^2(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c}{\left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c^2 \langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c^2} \tag{72}$$

— относительная дисперсия выходного сигнала спектрометра, обусловленная флуктуациями процессов, происходящих в детекторе от образования электронно-дырочной пары в сцинтилляторе до образования фотоэлектрона в фотодетекторе;

$$\eta_{\text{gain}}^2 = \frac{1}{\left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c \langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c}\frac{\sigma_g^2}{\langle g\rangle^2} \tag{73}$$

— относительная дисперсия выходного сигнала спектрометра, обусловленная флуктуациями коэффициента усиления фотодетектора и электронного усилителя;

$$\eta^2_{\text{noise}} = \frac{\sigma^2_{\text{noise}}}{\langle Q(E_0)\rangle^2} \tag{74}$$

– относительная дисперсия выходного сигнала спектрометра, обусловленная шумами фотодетектора и электроники.

Во всех приведенных выше формулах,

$$\frac{\partial Y^c(E_0,E)}{\partial E} = \frac{w^c(E_0,E)}{\varepsilon_{\text{e-h}}(E)} S(E)Q \tag{75}$$

– дифференциальный световыход сцинтиллятора для энергии электрона $E$, образованного рентгеновским квантом с энергией $E_0$, в процессе потери им энергии в сцинтилляторе, $w^c(E_0,E)$ – дифференциальная плотность поглощенной энергии для определенной конфигурации $c$ распределения поглощенной энергии в элементах фазового пространства $d\Gamma = dVdEd\mathbf{\Omega}$; $\varepsilon_{\text{e-h}}(E)$ – средняя энергия образования электронно-дырочной пары электроном с энергией $E$; $S(E)$ – вероятность активации люминесцентного центра, зависящая от тормозной способности электрона с энергией $E$; $Q$ – квантовая эффективность процесса люминесценции;

$$Y^c(E_0) = \int_E dEu(E - E_{\min})\frac{\partial Y^c(E_0,E)}{\partial E} = E_0 L \tag{76}$$

– световыход сцинтиллятора для рентгеновских квантов с энергией $E_0$; $L$ – удельный световыход; $\langle g\rangle$ и $\sigma^2_g$ среднее значение и дисперсия коэффициента усиления фотодетектора. Индекс $c$ при угловых скобках обозначает усреднение по всевозможным распределениям поглощенной энергии в элементах фазового пространства. В формулах учтена коммутативность операций интегрирования и усреднения, и мультипликативность усреднения произведения независимых величин.

В отличие от всех существующих в настоящее время в литературе формул, формулы микроскопической теории сцинтилляционных спектрометров с одним фотодетектором (68)–(74) содержат информацию о зависимостях всех вкладов в энергетическое разрешение от характеристик сцинтиллятора, интерфейса сцинтиллятор-фотодетектор, характеристик фотодетектора и электронного тракта спектрометра. Формулы отражают каскадный характер случайных процессов преобразования энергии первичной частицы в выходной сигнал спектрометра, поскольку каждый последующий вклад в энергетическое разрешение уменьшается в фактор, равный произведению средних значений предыдущих этапов.

Если фактор Фано, средняя энергия образования электронно-дырочной пары и вероятность активации люминесцентного центра не зависят от энергии электрона $E$, то есть, $F(E) = F$, $\varepsilon_{\text{e-h}}(E) = \varepsilon_{\text{e-h}}$, и $S(E) = S$, то, воспользовавшись соотношениями (75) и (76), выражение для относительной дисперсии сигнала сцинтилляционного спектрометра с одним фотодетектором можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned}\eta^2_Q = \eta^2_{\text{cov}} &+ \frac{\varepsilon_{\text{e-h}}F}{\langle W^c(E_0,E_{\min})\rangle_c}\frac{\langle T^2(\mathbf{r}_c)\rangle_c}{\langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c^2} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{\text{e-h}}}{\langle W^c(E_0,E_{\min})\rangle_c SQ}\frac{\langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c - SQ\langle T^2(\mathbf{r}_c)\rangle_c}{\langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c^2} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{\text{e-h}}}{\langle W^c(E_0,E_{\min})\rangle_c SQ\langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c}\eta^2_g + \frac{\sigma^2_{\text{noise}}}{\langle Q(E_0)\rangle^2}.\end{aligned} \tag{77}$$

Если регистрируемые частицы взаимодействуют со сцинтиллятором вблизи точки $\mathbf{r}_0$ сцинтиллятора, и элемент объема, в котором энергия регистрируемой частицы преобразуется в световые фотоны, является достаточно малым, то $\langle T(\mathbf{r}_c)\rangle_c = T(\mathbf{r}_0)$ и $\langle T^2(\mathbf{r}_c)\rangle_c = T^2(\mathbf{r}_0)$. Если учесть, что средняя энергия, поглощенная сцинтиллятором при регистрации рентгеновского излучения, которая идет на образование электронно-дырочных пар, практически равна энергии регистрируемой частицы

$$\langle W^c(E_0,E_{\min})\rangle_c = \int_E dEu(E - E_{\min})w^c(E_0,E) \approx E_0, \tag{78}$$

то выражение для относительной дисперсии сигнала сцинтилляционного спектрометра с одним фотодетектором, с учетом формулы (76), примет вид

$$\begin{aligned}\eta^2_Q = \eta^2_Y &+ \frac{\varepsilon_{\text{e-h}}F}{E_0} + \frac{1}{LE_0}\frac{T(\mathbf{r}_0) - SQT^2(\mathbf{r}_0)}{T^2(\mathbf{r}_0)} + \\ &+ \frac{1}{LE_0T(\mathbf{r}_0)}\eta^2_g + \frac{\sigma^2_{\text{noise}}}{\langle Q(E_0)\rangle^2},\end{aligned} \tag{79}$$

где

$$\eta^2_Y = \frac{\int_E\int_{E'} dEdE'u(E - E_{\min})u(E' - E_{\min})\left\langle \frac{\partial Y^c(E_0,E)}{\partial E}\frac{\partial Y^c(E_0,E')}{\partial E'}\right\rangle_c}{\langle Y^c(E_0)\rangle_c^2} - 1 \tag{80}$$

– относительная дисперсия выходного сигнала детектора, обусловленная ковариациями дифференциального световыхода сцинтиллятора. Именно это слагаемое связано с непропорциональностью световыхода, т.е. с зависимостью дифференциального световыхода от энергии электрона в процессе потерь им энергии в сцинтилляторе.

Если дифференциальный световыход сцинтиллятора не зависит от энергии электрона, то, в соответствии с формулой (75), формула (80) будет соответствовать относительной дисперсии выходного сигнала детектора, обусловленной ковариациями поглощенной энергии в сцинтилляторе

$$\eta_Y^2 = \eta_W^2 = \frac{\left\langle \int\limits_E \int\limits_{E'} dEdE'\, u(E - E_{\min}) u(E' - E_{\min}) w^c(E_0, E) w^c(E_0, E') \right\rangle_c}{\left\langle W^c(E_0, E_{\min}) \right\rangle_c^2} - 1. \tag{81}$$

Если учесть, что $\langle N_{\text{e-h}} \rangle = E_0/\varepsilon_{\text{e-h}} = LE_0/SQ$ и $\langle N_{\text{pe}} \rangle = LE_0 T(\mathbf{r}_0)$, то в этом случае можно привести формулу (79) к виду

$$\eta_Q^2 = \eta_Y^2 + \frac{F}{\langle N_{\text{e-h}} \rangle} + \frac{1}{\langle N_{\text{pe}} \rangle} - \frac{1}{\langle N_{\text{e-h}} \rangle} + \frac{1}{\langle N_{\text{pe}} \rangle}\eta_g^2 + \frac{\sigma_{\text{noise}}^2}{\langle Q(E_0) \rangle^2}. \tag{82}$$

Формула (82) применима также к случаю абсолютно прозрачного сцинтиллятора, поскольку в этом случае коэффициент $T$ также не зависит от координаты. Однако объединение второго слагаемого с четвертым, и третьего слагаемого с пятым в формуле (82) является некорректным. Поскольку фактор Фано для электронно-дырочных пар всегда меньше единицы $F < 1$, то объединение второго слагаемого с четвертым всегда отрицательно, а любой вклад в относительную дисперсию должен быть строго положительным.

## 6. КОВАРИАЦИИ МЕЖДУ СИГНАЛАМИ ФОТОДЕТЕКТОРОВ СЦИНТИЛЛЯЦИОННОГО СПЕКТРОМЕТРА

На значимость ковариаций между сигналами фотодетекторов было обращено внимание в работах [19, 20]. Ковариации между сигналами фотодетекторов сцинтилляционного спектрометра лежат в основе экспериментального метода определения фактора Фано, впервые предложенного в работе [21]. В работе [22] получены общие выражения микроскопической теории для ковариации между сигналами фотодетекторов сцинтилляционного спектрометра с несколькими фотодетекторами. Ковариация между сигналами фотодетекторов $Q_n(E)$ и $Q_{n'}(E)$ сцинтилляционного спектрометра может быть определена из ПФВ (27) как

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(Q_n, Q_{n'}) &= \left.\frac{\partial^2 f_{\{Q_n\}}[\{s_n\}]}{\partial s_n \partial s_{n'}}\right|_{\{s_n=1\}} - \left.\frac{\partial f_{\{Q_n\}}[\{s_n\}]}{\partial s_n}\right|_{\{s_n=1\}} \left.\frac{\partial f_{\{Q_n\}}[\{s_n\}]}{\partial s_{n'}}\right|_{\{s_n=1\}} = \\ &= \lim_{IJK\to\infty} \sum_c p^c_{\alpha ijk\alpha' i' j' k'} \sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk} \langle \nu_{\alpha ijk} \rangle \chi_{n\,\alpha ijk} \langle g_n \rangle \sum_{\alpha'=1}^{A}\sum_{i'=1}^{I}\sum_{j'=1}^{J}\sum_{k'=1}^{K} N^c_{\alpha' i' j' k'} \langle \nu_{\alpha' i' j' k'} \rangle \chi_{n'\alpha' i' j' k'} \langle g_{n'} \rangle - \\ &- \left( \lim_{IJK\to\infty} \sum_c p^c_{\alpha ijk} \sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk} \langle \nu_{\alpha ijk} \rangle \chi_{n\,\alpha ijk} \langle g_n \rangle \right) \times \\ &\times \left( \lim_{IJK\to\infty} \sum_c p^c_{\alpha' i' j' k'} \sum_{\alpha'=1}^{A}\sum_{i'=1}^{I}\sum_{j'=1}^{J}\sum_{k'=1}^{K} N^c_{\alpha' i' j' k'} \langle \nu_{\alpha' i' j' k'} \rangle \chi_{n'\alpha' i' j' k'} \langle g_{n'} \rangle \right) + \\ &+ \lim_{IJK\to\infty} \sum_c p^c_{\alpha ijk} \sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} N^c_{\alpha ijk} \chi_{n\,\alpha ijk} \left( \sigma^2_{\nu_{\alpha ijk}} - \langle \nu_{\alpha ijk} \rangle \right) \langle g_n \rangle \chi_{n'\alpha ijk} \langle g_{n'} \rangle. \end{aligned} \tag{83}$$

При переходе к распределению поглощенной энергии в объеме детектора, выражение для ковариации между сигналами фотодетекторов принимает вид

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Q_n, Q_{n'}) = {} & \sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{\alpha'=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega\int_{V'}\int_{E'}\int_{\Omega'} dVdEd\mathbf{\Omega}dV'\,dE'\,d\mathbf{\Omega}'\,u(E - E_{\alpha\min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))u(E' - E_{\alpha'\min}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}'))\times \\
& \times\left\langle \frac{w_\alpha^c(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\right\rangle_D \frac{w_{\alpha'}^c(E_0,\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')}{\varepsilon_{\text{e-h}\,\alpha'}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')}\left\langle\chi_{n'\alpha'}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')\right\rangle_D\right\rangle_c \left\langle g_n\right\rangle\left\langle g_{n'}\right\rangle - \\
& - \sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}u(E - E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))\left\langle \frac{w_\alpha^c(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\right\rangle_D\right\rangle_c \left\langle g_n\right\rangle\times \\
& \times\sum_{\alpha'=1}^{A}\int_{V'}\int_{E'}\int_{\Omega'} dV'dE'd\mathbf{\Omega}'\,u(E' - E_{\alpha'\min}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}'))\left\langle \frac{w_{\alpha'}^c(E_0,\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')}{\varepsilon_{\text{e-h}\,\alpha'}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')}\left\langle\chi_{n'\alpha'}(\mathbf{r}',E',\mathbf{\Omega}')\right\rangle_D\right\rangle_c \left\langle g_{n'}\right\rangle + \\
& + \sum_{\alpha=1}^{A}\int_V\int_E\int_\Omega dVdEd\mathbf{\Omega}u(E - E_{\alpha\ \min}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}))\times \\
& \times\left\langle \frac{w_\alpha^c(E_0,\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}{\varepsilon_{\text{e-h}\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})}(F_\alpha(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})-1)\left\langle\chi_{n\,\alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\right\rangle_D\left\langle\chi_{n'\ \alpha}(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})\right\rangle_D\right\rangle_c \left\langle g_n\right\rangle\left\langle g_{n'}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{84}
$$

Выражения(83) и (84) являются самыми общими выражениями для ковариации между сигналами фотодетекторов сцинтилляционного спектрометра.

Чтобы понять недостатки математической модели работы [11], приведем формулу микроскопической теории для ковариации между сигналами фотодетекторов $Q_n(E_0)$ и $Q_{n'}(E_0)$, сцинтилляционного спектрометра с однородным и изотропным сцинтиллятором, люминесцентные центры которого осуществляют один излучающий переход, для случая локального поглощения энергии низкоэнергетического рентгеновского излучения с энергией $E_0$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Q_n, Q_{n'}) = {} & \int_E\int_{E'} dEdE'\,u(E - E_{\min})u(E' - E_{\min})\left\langle\frac{\partial Y^c(E_0,E)}{\partial E}\frac{\partial Y^c(E_0,E')}{\partial E'}\right\rangle_c \times \\
& \times\left\langle T_n(\mathbf{r}_c)T_{n'}(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c\left\langle g_n\right\rangle\left\langle g_{n'}\right\rangle - \left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c^2\left\langle T_n(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c\left\langle T_{n'}(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c\left\langle g_n\right\rangle\left\langle g_{n'}\right\rangle + \\
& + \int_E dEu(E - E_{\min})\left\langle\frac{\partial Y^c(E_0,E)}{\partial E}(F(E)-1)\,S(E)\right\rangle_c Q\left\langle T_n(\mathbf{r}_c)T_{n'}(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c\left\langle g_n\right\rangle\left\langle g_{n'}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{85}
$$

В отличие от коэффициента корреляции, использованного в работе [11],

$$
\rho(Q_n, Q_{n'}) = \frac{\operatorname{cov}(Q_n, Q_{n'})}{\sigma_{Q_n}\sigma_{Q_{n'}}}, \tag{86}
$$

в работе [23], было предложено использовать относительную ковариацию между сигналами фотодетекторов, которая в нашем случае имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cov}(Q_n, Q_{n'})}{\left\langle Q_n\right\rangle\left\langle Q_{n'}\right\rangle} = {} & \frac{\int_E\int_{E'} dEdE'\,u(E - E_{\min})u(E' - E_{\min})\left\langle\frac{\partial Y^c(E_0,E)}{\partial E}\frac{\partial Y^c(E_0,E')}{\partial E'}\right\rangle_c}{\left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c^2}\frac{\left\langle T_n(\mathbf{r}_c)T_{n'}(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c}{\left\langle T_n(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c\left\langle T_{n'}(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c} - 1 + \\
& + \frac{\int_E dEu(E - E_{\min})\left\langle\frac{\partial Y^c(E_0,E)}{\partial E}(F(E)-1)\,S(E)Q\right\rangle_c}{\left\langle Y^c(E_0)\right\rangle_c^2}\frac{\left\langle T_n(\mathbf{r}_c)T_{n'}(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c}{\left\langle T_n(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c\left\langle T_{n'}(\mathbf{r}_c)\right\rangle_c}.
\end{aligned} \tag{87}
$$

Следует подчеркнуть что, в отличие от коэффициента корреляции (86), который зависит от всех вкладов в дисперсии сигналов фотодетекторов, относительная ковариация (87) не зависит от коэффициентов усиления и шумов электроники фотодетекторов. Это обстоятельство является важным преимуществом предложенного в работе [21] экспериментального метода определения фактора Фано.

Выражения для ковариации и относительной ковариации между сигналами фотодетекторов становятся наиболее простыми в случае, когда регистрируемые частицы взаимодействуют со сцинтиллятором вблизи точки $\mathbf{r}_0$ сцинтиллятора, и элемент объема, в котором энергия регистрируемой частицы преобразуется в световые фотоны, является достаточно малым, чтобы коэффициенты $\langle T_n(\mathbf{r}_0)\rangle_c = T_n(\mathbf{r}_0)$ и $\langle T_{n'}(\mathbf{r}_0)\rangle_c = T_{n'}(\mathbf{r}_0)$ были почти постоянными. В этом случае $\langle T_n(\mathbf{r}_0)T_{n'}(\mathbf{r}_0)\rangle_c = T_n(\mathbf{r}_0)T_{n'}(\mathbf{r}_0)$. Если фактор Фано, средняя энергия образования электронно-дырочной пары и вероятность активации люминесцентного центра не зависят от энергии электрона $E$, то есть, $F(E) = F$, $\varepsilon_{\text{e-h}}(E) = \varepsilon_{\text{e-h}}$, и $S(E) = S$, то, воспользовавшись соотношениями (75) и (76), выражение для ковариации между сигналами фотодетекторов можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Q_n, Q_{n'}) = \int_E\int_{E'} dE dE' u(E - E_{\min})u(E' - E_{\min}) \times \\ \times \operatorname{cov}\left(\frac{\partial Y(E_0, E)}{\partial E}, \frac{\partial Y(E_0, E')}{\partial E'}\right) \times \\ \times T_n(\mathbf{r}_0)T_{n'}(\mathbf{r}_0)\langle g_n\rangle\langle g_{n'}\rangle + \frac{\langle W^c(E_0, E_{\min})\rangle_c}{\varepsilon_{\text{e-h}}} \times \\ \times (F-1)(SQ)^2 T_n(\mathbf{r}_0)T_{n'}(\mathbf{r}_0)\langle g_n\rangle\langle g_{n'}\rangle,\end{aligned} \tag{88}$$

где $\langle W^c(E_0, E_{\min})\rangle_c$ – средняя энергия, поглощенная сцинтиллятором при регистрации рентгеновского излучения, которая идет на образование электронно-дырочных пар, определяемая формулой (78).

Выражение для ковариации между сигналами фотодетекторов (14), полученное в работе [11], совпадет со вторым слагаемым в формуле (88), если заменить фактор Фано для световых фотонов на фактор Фано для электронно-дырочных пар. Поскольку фактор Фано для электронно-дырочных пар в полупроводниках имеет значение порядка 0.1, то это объясняет результаты, полученные в работах [11, 12].

Выражение для относительной ковариации между сигналами фотодетекторов в случае локального поглощения рентгеновского кванта вблизи точки $\mathbf{r}_0$ сцинтиллятора примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{cov}(Q_n, Q_{n'})}{\langle Q_n\rangle\langle Q_{n'}\rangle} = \eta_Y^2(E_0) + \frac{\varepsilon_{\text{e-h}}}{\langle W^c(E_0, E_{\min})\rangle_c} \times \\ \times (F-1) \approx \eta_Y^2(E_0) + \frac{\varepsilon_{\text{e-h}}}{E_0}(F-1),\end{aligned} \tag{89}$$

где $\eta_Y^2$ – относительная дисперсия выходного сигнала детектора, обусловленная ковариациями дифференциального световыхода сцинтиллятора, определяемая формулой (80). Выше подчеркивалось, что если дифференциальный световыход сцинтиллятора не зависит от энергии электрона, то формула (80) соответствует относительной дисперсии выходного сигнала детектора, обусловленной ковариациями поглощенной энергии в сцинтилляторе $\eta_Y^2 = \eta_W^2$, определяемой формулой (81).

Зависимость последнего слагаемого в формуле (89) от обратной энергии регистрируемых частиц позволяет разделить вклады в относительную ковариацию от относительной дисперсии, обусловленной ковариациями дифференциального световыхода сцинтиллятора, и от фактора Фано, и дает возможность их экспериментального определения. Так как относительная ковариация между сигналами фотодетекторов не зависит от коэффициентов усиления и шумов электроники фотодетекторов, то, для улучшения условия локального поглощения, необходимо направить тонкий луч излучения перпендикулярно к сцинтиллятору, имеющего форму длинного тонкого стержня с двумя фотодетекторами на концах, чтобы поглощение излучения происходило в серединном сечении стержня.

Следует отметить, что определение дифференциального световыхода сцинтиллятора и фактора Фано с помощью относительной ковариации имеет неоспоримое преимущество, по сравнению с существующими методами, основанными на вычитании электронного шума из дисперсии сигнала фотодетектора [24]. Это становится очевидным, если сравнить формулу для относительной ковариации (89) с формулой для относительной дисперсии сигнала сцинтилляционного спектрометра (79). В связи с тем, что третье и четвертое слагаемые в формуле (79) также обратно пропорциональны энергии регистрируемой частицы, и их нельзя отделить от второго слагаемого, экспериментальное значение фактора Фано, определяемое без их учёта, будет завышено.

## 7. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ РАБОТ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В работе [10] дан подробный анализ недостатков всех существующих работ, посвященных энергетическому разрешению сцинтилляционных спектрометров с одним фотодетектором. Ниже, будет дан краткий обзор характерных недостатков существующих формул для энергетического разрешения сцинтилляционных спектрометров. Из микроскопической теории сцинтилляционных спектрометров следует, что формула (5) и третье слагаемое в формуле (9) не могут представлять статистический вклад ФЭУ или фотодиода, поскольку они содержат также положительное слагаемое, входящее в относительную дисперсию (72). Это неприемлемо, так как остающееся отрицательное слагаемое относительной дисперсии выходного сигнала спектрометра, обусловленной флуктуациями процессов, происходящих в детекторе от образования электронно-дырочной пары в сцинтилляторе до образования фотоэлектрона в фотодетекторе (72), не может отдельно входить в относительную дисперсию выходного сигнала спектрометра. Все вклады в относительную дисперсию выходного сигнала спектрометра должны быть строго положительными! Только относительная дисперсия выходного сигнала, обусловленная флуктуациями процессов, происходящих в детекторе от образования электронно-дырочной пары в сцинтилляторе до образования фотоэлектрона в фотодетекторе (72), всегда положительна, поскольку является относительной дисперсией биноминального процесса.

Следует подчеркнуть, что формула (5) и третье слагаемое в формуле (9) справедливы только в случае, если флуктуации числа световых фотонов описываются распределением Пуассона. Это предположение является неприемлемым, поскольку противоречит экспериментальным данным. Из микроскопической теории сцинтилляционных спектрометров следует, что относительная дисперсия выходного сигнала сцинтилляционного спектрометра не должна содержать фактора Фано для световых фотонов. Это связано с тем, что флуктуации процесса испускания световых фотонов различными люминесцентными центрами в сцинтилляторе являются независимыми. Так как процесс испускания светового фотона люминесцентным центром описывается биномиальным распределением, то его флуктуации учитываются в формуле (72). В относительную дисперсию выходного сигнала спектрометра, входит только фактор Фано, определяющий флуктуации числа электронно-дырочных пар (71).

Введение фактора Фано для световых фотонов в работах [9, 11] ошибочно, и может привести к неоднозначности, поскольку в физике фактор Фано для световых фотонов уже существует в квантовой оптике. В квантовой оптике статистика фотонов определяется фактором Фано для световых фотонов [25], который характеризует относительную дисперсию в числе фотонов в световом импульсе

$$\eta_N^2 = F_N / \langle N \rangle. \tag{90}$$

В квантовой оптике существуют три возможных статистики фотонов в световом импульсе. Если $F_N = 1$, то статистика фотонов пуассоновская. Источник света со стабильной интенсивностью подчиняется статистике Пуассона, например, идеально когерентный лазерный свет. Если $F_N > 1$, статистика фотонов суперпуассоновская. Любой классический источник света, или более точно, любой источник с хаотически изменяющейся интенсивностью света подчиняется суперпуассоновской статистике. Если $0 < F_N < 1$, статистика фотонов субпуассоновская, то есть источник света является неклассическим, например, так называемый квантовый источник сжатого света.

Результаты экспериментов [11, 12] не являются доказательством открытия, как утверждали авторы, субпуассоновской статистики для световых фотонов в сцинтилляторах. Их ошибочное утверждение происходит из-за отсутствия в классической теории сцинтилляционных спектрометров упомянутых выше промежуточных этапов, происходящих в сцинтилляторе перед процессом генерации фотонов, т.е. этапов преобразования энергии первичной частицы в энергию вторичных заряженных частиц, генерации электронно-дырочных пар и возбуждения люминесцентных центров. Результаты работ [11, 12] являются явным подтверждением вышеупомянутого недостатка классической теории и указывают на неприменимость использования фактора Фано для световых фотонов в сцинтилляторе.

Фактор Фано для световых фотонов, введенный в работе [9], фактически определяется флуктуациями процессов, происходящих в детекторе от образования электронно-дырочной пары в сцинтилляторе до образования фотоэлектрона в фотодетекторе. А это означает, что введенный фактор Фано для световых фотонов определяется многими характеристиками конкретного спектрометра, такими как геометрия сцинтилляционного кристалла, его прозрачность, квантовый выход фотоприемника, и т.д. Поэтому, фактор Фано для световых фотонов, представленный вторым слагаемым в формуле (9), не фундаментален, и его введение бессмысленно с точки зрения сравнения результатов, полученных различными исследователями.

По моему мнению, плотность концентрации электронно-дырочных пар в треке, введенная в работе [9], не является хорошей переменной для описания процессов, происходящих в сцинтилляторе. Наиболее адекватным для описания процессов, происходящих в сцинтилляторе, является использование фазового пространства вторичных частиц. Только при таком подходе, полная энергия, поглощенная в сцинтилляторе, всегда равна энергии регистрируемой частицы, в то время как полное число электронно-дырочных пар в сцинтилляторе меняется от регистрации к регистрации.

Главный вывод микроскопической теории состоит также в том, что невозможно разделить вклады от ионизационных потерь и от дельта-электронов, так как они входят в дисперсию выходного сигнала детектора, обусловленную ковариациями вторичных частиц в фазовом пространстве (59). Объяснить ошибочный подход в работах [7, 8], в которых авторы разделили вклады от ионизационных потерь и от дельта-электронов, а затем суммировали их флуктуации, поможет простой пример. Если полная энергия, поглощенная сцинтиллятором, равна энергии регистрируемой частицы, то

$$E_0 = \sum_{\alpha ijk} W^c_{\alpha ijk}, \tag{91}$$

где $W^c_{\alpha ijk}$ – энергия, поглощенная в элементе объема $\Delta V_i$ для определенной конфигурации $c$ вторичных частиц $N^c_{\alpha ijk}$ типа $\alpha$ в элементах фазового пространства $\Delta\Gamma_{ijk} = \Delta V_i \Delta E_j \Delta\Omega_k$.

Усреднение по всевозможным комбинациям вторичных частиц в элементах фазового пространства дает соотношения

$$E_0 = \left\langle E_0 \right\rangle_c = \sum_{\alpha ijk} \left\langle W^c_{\alpha ijk} \right\rangle_c, \tag{92}$$

$$E_0^2 = \left\langle E_0^2 \right\rangle_c = \sum_{\alpha ijk} \sum_{\alpha' i' j' k'} \left\langle W^c_{\alpha ijk} W^c_{\alpha' i' j' k'} \right\rangle_c. \tag{93}$$

В результате дисперсия поглощенной энергии равна нулю

$$\begin{aligned} \sigma^2_{E_0} &= \left\langle E_0^2 \right\rangle_c - \left\langle E_0 \right\rangle_c^2 = \sum_{\alpha ijk} \sum_{\alpha' i' j' k'} \left( \left\langle W^c_{\alpha ijk} W^c_{\alpha' i' j' k'} \right\rangle_c - \left\langle W^c_{\alpha ijk} \right\rangle_c \left\langle W^c_{\alpha' i' j' k'} \right\rangle_c \right) = \\ &= \sum_{\alpha ijk} \sigma^2_{W_{\alpha ijk}} + \sum_{\alpha ijk} \sum_{\alpha' i' j' k' \neq \alpha ijk} \left( \left\langle W^c_{\alpha ijk} W^c_{\alpha' i' j' k'} \right\rangle_c - \left\langle W^c_{\alpha ijk} \right\rangle_c \left\langle W^c_{\alpha' i' j' k'} \right\rangle_c \right) = 0. \end{aligned} \tag{94}$$

Последняя формула убедительно демонстрирует важность ковариаций между вторичными частицами в различных элементах фазового пространства. Суммирование дисперсий, без учета ковариаций между вторичными частицами в различных элементах фазового пространства, как это сделано в [7, 8], не дает правильный результат. Поэтому, любая подгонка свободных параметров теории с экспериментальными данными сомнительна.

## 8. ЗАЧЕМ НУЖНА СТАНДАРТНАЯ ТЕОРИЯ СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ?

Цель стандартной теории сцинтилляционных спектрометров состоит в том, чтобы обеспечить единый подход к определению характеристик процессов, происходящих в сцинтилляционных спектрометрах, из экспериментальных данных, и сформулировать условия достижения необходимой точности. Необходимо подчеркнуть, что стандартная теория сцинтилляционных спектрометров не заменяет физику и оптику сцинтилляторов, физику фотодетекторов и методы ядерной электроники. Общие формулы стандартной теории сцинтилляционных спектрометров, должны помочь теоретикам в физике сцинтилляторов понять какие вероятности они должны вычислять, в соответствии с их моделями, и какие требования должны быть предъявлены эксперименту, чтобы сравнить их вычисления с экспериментальными данными. В частности, теория может значительно сократить время вычислений, если для определения влияния непропорциональности световыхода, вместо непосредственного моделирования процесса регистрации частицы методом Монте-Карло вычислить ковариационную матрицу поглощенной энергии, коэффициенты светосбора, и затем, изменением параметров модели для дифференциального световыхода, достичь согласия с экспериментальными данными. Общие формулы стандартной теории сцинтилляционных спектрометров, должны помочь экспериментаторам выяснить, при каких условиях они могут сравнить свои экспериментальные результаты с теорией, и с результатами других экспериментальных групп.

Таким образом, главная цель стандартной теории сцинтилляционных спектрометров состоит не в том, чтобы заменить обширные исследование в областях, связанных с физикой сцинтилляторов, а в том, чтобы создать надежные основания для связи теоретических и экспериментальных исследований в этой области.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что существующие макроскопические теории сцинтилляционных спектрометров содержат много фундаментальных недостатков. В работе сформулирована микроскопическая математическая модель, которая служит основанием для стандартной теории сцинтилляционных спектрометров с несколькими фотодетекторами. Стандартная теория позволяет получать формулы для произвольных моментов функции распределения сигнала на выходах фотодетекторов сцинтилляционного спектрометра. Показано, что в разработанной стандартной теории сцинтилляционных спектрометров отсутствуют недостатки существующих в настоящее время теорий сцинтилляционных спектрометров, и она может служить надежным основанием для связи теоретических и экспериментальных исследований исследование в областях, связанных с физикой сцинтилляторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERENCES

1. *Breitenberger E.* // Progr. Nucl. Phys. 1995. V. 4. P. 56.
2. *Birks J.B.* The Theory and Practice of Scintillation Counting. 1967. London: Pergamon.
3. *Moszyński M. et al.* // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A. 2016. V. 805. P. 25.
4. *Lecoq P. et al.* Inorganic Scintillators for Detector Systems. 2006. Berlin: Springer.
5. *Knoll G.F.* Radiation Detection and Measurement. 2000. New York: Wiley.
6. *Grupen C., Shwartz B.* Particle Detectors. 2008. New York: Cambridge Univ. Press.
7. *Payne S.A. et al.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2009. V. 56. P. 2506.
8. *Payne S.A.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2015. V. 62. P. 372.
9. *Gektin A., Vasil'ev A.* // Radiat. Meas. 2019. V. 122. P. 108.
10. *Samedov V.V.* // Phys. At. Nucl. 2021. V. 84. P. 1555. https://doi.org/10.1134/S1063778821100331
11. *Bousselham A. et al.* // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A. 2010. V. 620. P. 359.
12. *Bora V. et al.* // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A. 2016. V. 805. P. 72.
13. *Samedov V.V.* // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A. 2012. V. 691. P. 168.
14. *Samedov V.V.* // X-Ray Spectrom. 2019. V. 48. P. 597.
15. *Samedov V.V.* Accounting for Fluctuations in Electron-Photon Showers in the Theory of Shower Spectrometers. Ph.D Thesis. 1972. MEPhI (in Russian).
16. *Samedov V.V.* // Instrum. Exp. Tech. 1985. V. 28. P. 580.
17. *Samedov V.V.* // Meas. Tech. 1985. V. 28. P. 265.
18. *Samedov V.V.* // EPJ Web Conf. 2020. V. 225. P. 01007.
19. *Samedov V.V.* // J. Low Temp. Phys. 2008. V. 151. P. 333.
20. *Samedov V.V.* // AIP Conf. Proc. 2009. V. 1185. P. 397.
21. *Samedov V.V.* // AIP Conf. Proc. 2009. V. 1185. P. 462.
22. *Samedov V.V.* // Phys. At. Nucl. 2019. V. 82. P. 1647. 2011. https://doi.org/10.1134/S1063778819120263
23. *Samedov V.V.* // Proc. 2nd Int. Conf. Advancements in Nuclear Instrumentation, Measurement Methods and their Applications. Ghent, Belgium. 2011. https://doi.org/10.1109/ANIMMA.2011.6172832.
24. *Devanathan R. et al.* // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A. 2006. V. 565. P. 637.
25. *Loudon R.* The Quantum Theory of Light. 2000. New York: Oxford Univ. Press.

# Why Do We Need a Standard Theory of Scintillation Spectrometers with Several Photodetectors?

**V. V. Samedov***

*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

**e-mail: v-samedov@yandex.ru*

Received July 26, 2021; revised August 13, 2021; accepted August 16,2021

**Abstract**—At present, scientists propose different formulas for the energy resolution of scintillation spectrometers, which sometimes contradict each other. The terms included in the formulas for the energy resolution differ not only in their names but also in the physical meaning. The main drawback of all of these theories of scintillation spectrometers is the unjustified introduction of different terms into the formula for the energy resolution without considering their connection with the specific characteristics of the scintillation detector. This approach is not only wrong but also counterproductive, since it does not allow comparison of the results obtained by different scientific groups. In this work, the drawbacks of the theories are analyzed on the basis of the standard theory of scintillation spectrometers with several photodetectors. It is shown that only the formulas of the standard theory for arbitrary moments of the output signal distribution function of the photodetectors of a scintillation spectrometer serve as a reliable basis for linking theoretical and experimental researches in the field of scintillator physics.

*Keywords:* scintillation detector, photodetector, energy resolution, light yield, light yield nonlinearity, light collection, Fano factor, covariance between signals