

## УСКОРИТЕЛИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

УДК 537.533

### ПРИМЕНЕНИЕ ФИТИРОВАНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА МЕТОДОМ ПОГЛОЩАЮЩИХ ФИЛЬТРОВ

© 2023 г. А. А. Дроздовский<sup>a</sup>, С. А. Дроздовский<sup>a</sup>, \*,  
А. В. Канцырев<sup>a</sup>, А. В. Скобляков<sup>a</sup>, В. А. Волков<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, 123182 Россия

\*E-mail: Stanislav.Drozdovsky@itep.ru

Поступила в редакцию 10.07.2022 г.

После доработки 30.07.2022 г.

Принята к публикации 15.12.2022 г.

В области ускорительной физики при необходимости проводить измерение энергетического спектра электронов с энергией более 100 кэВ может применяться метод поглощающих фильтров. В данной работе разработана модификация метода поглощающих фильтров для измерения дельта-образных спектров электронных пучков, основанная на фитировании статистическими распределениями исходных экспериментальных данных и результатов моделирования прохождения пучка через фильтры. Новый метод позволяет существенно повысить точность и качество обработки экспериментальных данных и удовлетворительно согласуется с результатами измерений магнитным спектрометром.

**Ключевые слова:** электронный пучок, энергетический спектр, поглощающие фильтры, обратная задача, регуляризация, фитирование

**DOI:** 10.56304/S2079562922050578

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Определение энергетического спектра пучков заряженных частиц является важной задачей для широкого круга исследовательских и прикладных работ. При измерении спектра традиционно применяются магнитные спектрометры. Альтернативным и часто технически более доступным способом при энергии электронов более 100 кэВ является измерение энергии заряженных частиц по их поглощению в веществе, то есть метод поглощающих фильтров [1]. Пучок пропускается через последовательность металлических пластин одинаковой толщины, расположенных перпендикулярно оси пучка с фиксированным интервалом. При этом измеряется поглощенный в каждой пластине заряд. В данной работе представлена модификация описанного в [2] метода восстановления спектра пучка из распределения зарядов по пластинам измерительной сборки. Известный ранее метод поглощающих фильтров улучшен в отношении точности и удобства применения, при некоторых условиях, касающихся формы спектра и искажений данных.

В основе метода поглощающих фильтров лежит предположение, что зависимость пучок → спектр линейна и непрерывна. Поэтому процессу измерений соответствует система уравнений:

$$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} K_i(\varepsilon) q(\varepsilon) d\varepsilon = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $Q_i$  – экспериментально определенный заряд, поглощенный пластиной под номером  $i$ ,  $\varepsilon$  – энергия,  $q(\varepsilon) = dQ/d\varepsilon$  – энергетический спектр пучка (распределение плотности заряда по энергии),  $K_i(\varepsilon)$  – ядро интегрального преобразования, являющееся непрерывной функцией, которое допускает статистическую интерпретацию – плотность вероятности для частицы с энергией  $\varepsilon$  быть поглощенной в пластине  $i$ . Интегрирование производится в интервале  $\{E_{\min}, E_{\max}\}$ , ограниченном диапазоном допустимых энергий частиц в пучке. Требуется определить  $q(\varepsilon)$  путем решения системы интегральных уравнений.

Уравнение (1) является некорректно поставленной обратной задачей [3], которая решается методом регуляризации Тихонова, т.е. минимизацией по  $q$  функционала

$$\|Kq - Q\|^2 + \lambda \|q\|^2, \quad \lambda > 0, \quad (2)$$

где  $\| \cdot \|$  обозначает норму вектора или матрицы (оператора), а  $Kq = Q$  является операторной или матричной формой записи нашей системы (см. (3)). Первое слагаемое отвечает за близость решения к оригиналу, а второе за регулярность (гладкость и четкость формы). Чем больше параметр

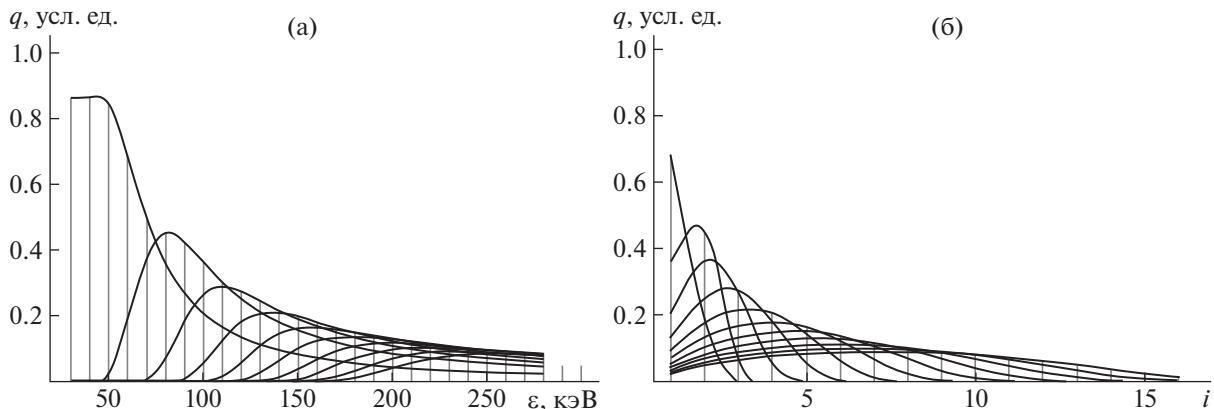


Рис. 1. Структура матрицы  $K$  (а) распределения поглощенного заряда  $q$  по энергиям  $\epsilon$  электронов для каждой пластины, (б) распределения поглощенного заряда по пластинам с номером  $i$  для каждой энергии.

регуляризации  $\lambda$ , тем выше регулярность и ниже точность.  $\lambda = 0$  соответствует методу наименьших квадратов. Поиск минимума обычно проводится методом сопряженного градиента по причине его относительной простоты и низкой ресурсоемкости.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И МЕТОД ФИТИРОВАНИЯ

Прежде чем решать задачу минимизации функционала численно, необходимо провести дискретизацию. Для этого разобъем область определения на достаточно малые равные интервалы  $\epsilon_{j+1} - \epsilon_j = \Delta\epsilon$  и предположим  $q(\epsilon)$  кусочно-постоянной на интервалах  $\{\epsilon_j - \Delta\epsilon/2, \epsilon_j + \Delta\epsilon/2\}$ . Аналогично приблизим  $K_i(\epsilon)$  ступенчатыми функциями. Тогда интегральные соотношения (1) примут вид системы линейных уравнений:

$$\sum_j K_{ij} q_j = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где  $K_{ij} = \Delta\epsilon K_i(\epsilon_j)$ ,  $q_j = q(\epsilon_j)$ .

Эту систему уравнений можно записать в матричной форме  $Kq = Q$ .

Монохромный пучок с энергией  $\epsilon_j$  и единичным зарядом имеет распределение в виде дельта-функции  $\delta(\epsilon - \epsilon_j)$ , а следовательно из (1) функцию поглощения  $Q_i = K_i(\epsilon_j)$ . Таким образом, имея необходимый набор монохромных пучков и их функции поглощения, можно получить все значения  $K_{ij}$ .

В данной работе в качестве экспериментальной и численной реализации мы будем рассматривать систему из 16 алюминиевых фольг диаметра 50 мм толщиной 20 мкм с зазором 1 мм между соседними пластинами, а также пропускаемые через них пучки электронов с диаметром попечечного сечения 1 см. Экспериментальные данные получены на электронной пушке для физических исследований [4].

Матрица  $K$  получена численным моделированием прохождения электронных пучков с использованием метода Монте-Карло в программе Geant4 [6]. Рассчитывались величины накопления (поглощения) зарядов на фольгах при пропускании моноэнергетических пучков электронов в диапазоне энергий от 30 до 300 кэВ с шагом 5 кэВ. При таком шаге заданный диапазон заполняется достаточно плотно, т.е. при увеличении числа отсчетов по энергии результат практически не меняется.

На рис. 1 изображена структура массива  $K$ , элементы которого соединены интерполирующими кривыми: (а) строки, (б) столбцы, в усеченном виде для удобства восприятия. Характерная форма кривых позволяет сделать предположение относительно возможных фитирующих распределений.

Первоначально в решении использовались оригинальные массивы  $K$  и  $Q$ , полученные в результате моделирования и эксперимента соответственно. Но высокая степень некорректности обратной задачи приводила к большим значениям параметра регуляризации  $\lambda$ , что поставило под сомнение применимость данного подхода. Однако выяснилось, что  $K$  и  $Q$  очень хорошо аппроксимируются гладкими функциями, основанными на статистических распределениях. Использование таких аппроксимаций позволило уменьшить параметр регуляризации практически до нуля и достичь точности близкой к предельной для матричного уравнения. Таким образом, решающее значение имеет не регуляризация, а точное фитирование.

Фитирование осуществляется следующим образом. Пусть  $M_{ij}$  – двумерный массив. Предположим, что функция  $f(\{a\}; x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$ , зависящая от параметров  $\{a\}$ , способна аппроксимировать  $M_{ij}$  при надлежащей оптимизации параметров. Методом наименьших квадратов мы находим наилучшее приближение (значения парамет-

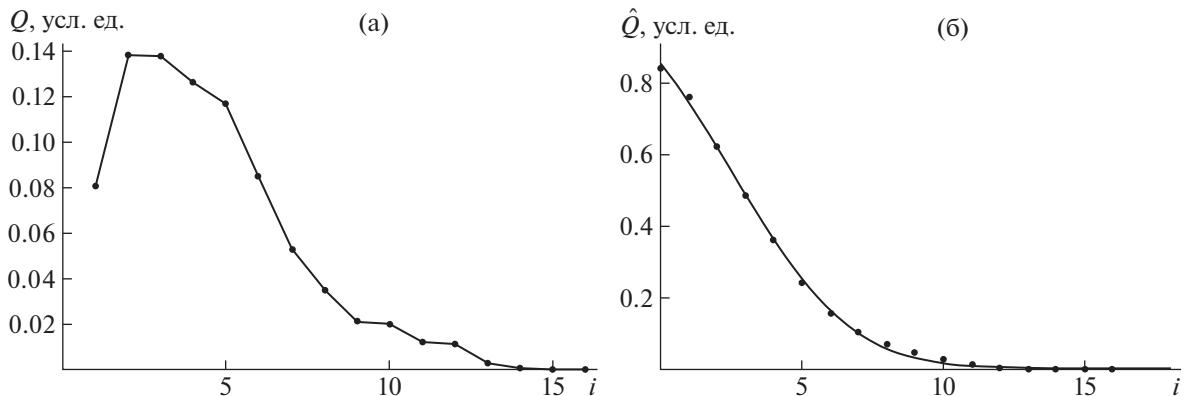


Рис. 2. Экспериментальные данные сигнала с измеряющими пластин (электронный пучок с энергией максимальной плотности спектра 180 кэВ) и результат фитирования. (а) Функция поглощения \$Q\$ (исходные экспериментальные данные). (б) Фитирование функции прохождения \$\hat{Q}\$: точки изображают дискретную функцию прохождения, кривая – непрерывную аппроксимирующую функцию. \$i\$ – номер платины.

ров), и далее заменяем \$M\_{ij}\$ на \$f(\{a\}; i, j)\$. Аналогичным образом одномерный массив фитируется функцией одной переменной. Наглядно структура фитирования показана на конкретном примере на рис. 2.

Пусть \$D\$ – статистическое распределение, обозначим через \$P\_D\$ и \$C\_D\$ его функцию плотности вероятности и кумулятивную функцию распределения соответственно. Вторая является интегралом от первой. Нам понадобятся следующие распределения случайных величин.

Нормальное:

$$\begin{aligned} P_N(\sigma, \mu; x) &= e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} / \sqrt{2\pi}\sigma, \\ C_N(\sigma, \mu; x) &= 1/2 \operatorname{Erfc}[(\mu - x)/\sqrt{2}\sigma]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Логнормальное:

$$\begin{aligned} P_{LN}(\sigma, \mu; x) &= e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2} / \sqrt{2\pi}\sigma, \\ C_{LN}(\sigma, \mu; x) &= 1/2 \operatorname{Erfc}[(\mu - \ln x)/\sqrt{2}\sigma], \quad x > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Фитирование матрицы ядра \$K\$ проводится послойно в два этапа. Сначала для каждого \$j\$ (фиксирована энергия) приблизим одномерный массив \$K\_{ij}\$ (распределение заряда по пластинам) функцией \$\alpha\_j P\_N(\sigma\_j, \mu\_j; x) + \beta\_j\$ переменного \$x\$, получим фитированный массив \$\bar{K}\_{ij}\$. Затем для каждого \$i\$ (фиксирована пластина) приблизим одномерный массив \$\bar{K}\_{ij}\$ (распределение заряда по энергиям) функцией \$\alpha\_i P\_{LN}(\sigma\_i, \mu\_i; y - \gamma\_i)\$ переменного \$y\$, в результате получаем фитированный массив \$\bar{\bar{K}}\_{ij}\$. \$\sigma, \mu, \alpha, \beta, \gamma\$ – параметры фитирования.

Итерирование вышеописанной операции, а также аппроксимация всего массива сразу одной функцией двух переменных к улучшению результата не привели. Поэтому мы остановились на од-

нократном послойном по энергиям и пластинам приближении.

Для фитирования экспериментальных данных помимо функции поглощения \$Q\_i\$ используется также функция прохождения заряда \$\hat{Q}\_i\$, которые связаны следующими соотношениями:

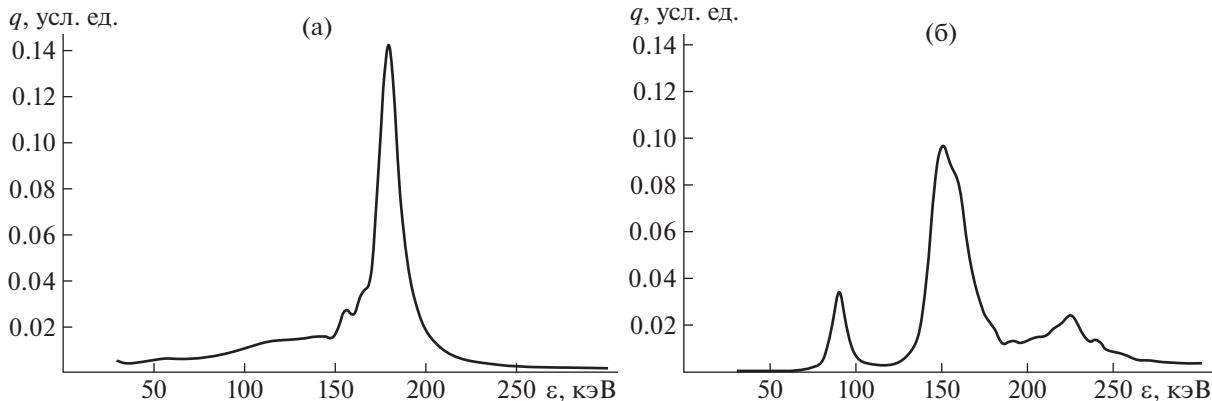
$$\begin{aligned} \hat{Q}_i &= \sum_{j=1+i}^n Q_j, \quad i = 0, \dots, n, \\ Q_i &= \widehat{\bar{Q}_{i-1}} - \hat{Q}_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Аппроксимация данных происходит в следующем порядке. Сначала из \$Q\_i\$ вычисляется \$\hat{Q}\_i\$ как показано выше, затем одномерный массив \$\hat{Q}\_i\$ приближается функцией \$\alpha C\_N(\sigma, \mu; -x) + \beta\$ переменной \$x\$, и далее обратным преобразованием получаем фитированный \$Q\_i\$.

В непрерывной интерпретации это означает: интегрирование \$\rightarrow\$ фитирование интегральным распределением \$\rightarrow\$ дифференцирование. Аналогичным образом аппроксимировался массив ядра \$K\$ (см. выше), с использованием кумулятивной функции вместо плотности, что несколько улучшило результат.

### 3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ

Проиллюстрируем применение разработанного метода на примере восстановления спектра пучка с энергией максимальной плотности спектра 180 кэВ, генерируемого на электронной пушке [4]. Постановка эксперимента указана в разделе 2, ток пучка составлял 100 А. На рис. 2б показано вышеописанное фитирование функции



**Рис. 3.** Восстановленный энергетический спектр электронного пучка с энергией максимальной плотности спектра 180 кэВ: (а) полученный методом фитирования, (б) без фитирования.  $\epsilon$  – энергия,  $q$  – плотность заряда относительно энергии.

прохождения  $\hat{Q}$ . Фитирование фактически является смещением вдоль оси ординат точек массива до попадания на кривую, которые, как следует из рис. 2б, очень близки.

Далее решаем уравнение  $Kq = Q$  с фитированными  $K$  и  $Q$  методом регуляризации Тихонова (2) с параметром регуляризации  $\lambda = 0$  (что означает максимальную точность в пределах метода), с использованием сопряженного градиента непосредственно для оптимизации. На рис. 3а показан восстановленный спектр. Полученный спектр достаточно регулярен (см. комментарий к (2)) и имеет характерную дельта-образную форму с плавным подъемом и резким спадом, типичную для данного источника (электронной пушки) [4, 5].

Для сравнения на рис. 3б показан спектр, восстановленный без фитирования, в случае использования оригинальных  $K$  и  $Q$ . Здесь параметр  $\lambda > 0$ , для достижения приемлемой регулярности.

Проверка эффективности разработанной методики проведена путем сравнения результатов восстановления энергетических спектров электронов, измеренных методом поглощающих фильтров, и данных, полученных с помощью магнитного спектрометра на той же установке. Измерения осуществлялись с помощью компактного магнитного спектрометра на постоянных магнитах с энергетическим разрешением  $\Delta E/E \leq 0.8\%$ . Измерения методом фильтров проводились при тех же условиях и параметрах, что указаны выше. На рис. 4 показаны энергетические спектры электронного пучка с энергией максимальной плотности спектра 195 и 230 кэВ и током 100 А: полученные методом поглощающих фильтров с фитированием, без фитирования и измеренные на магнитном спектрометре. Так как значения заряда указаны в условных единицах, для удобства сравнения спектры перенормированы исходя из равенства единице полного заряда пучка. Для вычисления спектров без

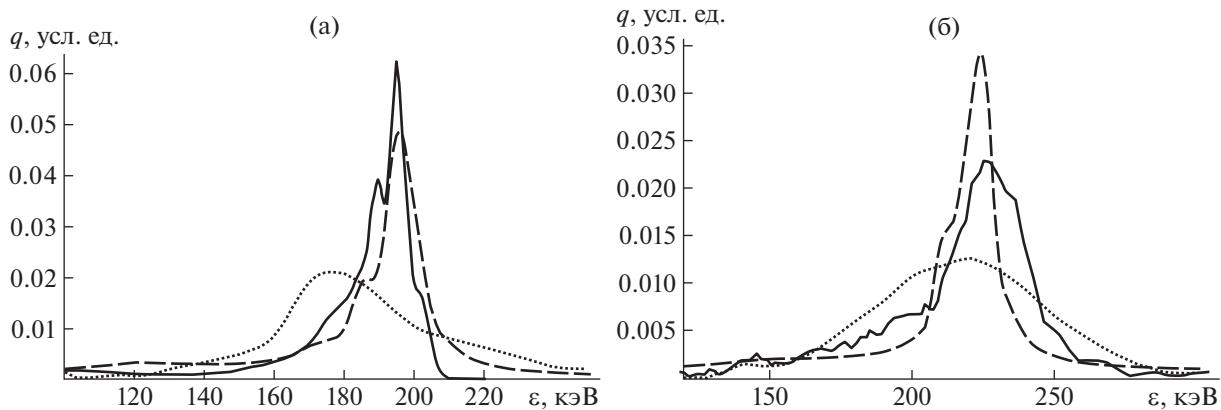
фитирования здесь параметр регуляризации имеет большее значение, чем в первом примере (рис. 3), поэтому полученные спектры более размыты.

#### 4. АНАЛИЗ МЕТОДА И ОБЛАСТЬ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Точная аппроксимация матрицы  $K$  нормальным и логнормальным распределениями возможно связана с тем, что численная модель прохождения моноэнергетических пучков через пластины, при помощи которой была получена  $K$ , имеет аналитическую интерпретацию, в которую хорошо вписываются статистические распределения нормального типа.

Аппроксимируемость массива входных данных нормальным распределением для рассматриваемого источника объясняется достаточно просто. Как видно из рис. 2, 3 в разделе 3, полученные спектры хорошо локализованы и компактны, другими словами близки к моноэнергетическим. Такие спектры в данной работе называются дельта-образными, то есть имеющими вид дельта-образной функции. Функция поглощения моноэнергетического пучка является столбцом матрицы  $K$ , который точно приближается нормальным распределением (см. раздел 2), соответственно функция поглощения дельта-образного пучка близка к нормальному распределению.

В терминах линейной алгебры решение уравнения (3) сводится к линейному разложению функции поглощения по столбцам матрицы  $K$ , а точнее наилучшему приближению таким разложением методом наименьших квадратов или в виде соотношения (2). Совокупность столбцов фитированной матрицы  $K$  представляет собой довольно плотный спектр гауссовых функций, а фитированная функция поглощения в свою очередь также является функцией Гаусса, причем близкой к не-

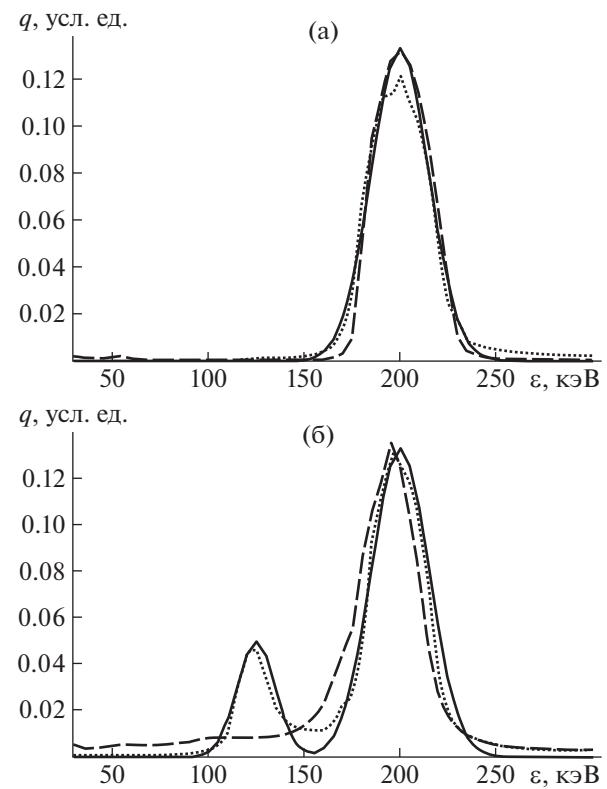


**Рис. 4.** Сравнение результатов восстановления энергетического спектра электронного пучка при измерениях методом поглощающих фильтров с результатами измерений полученных с помощью магнитного спектрометра. Спектр пучка с энергией максимальной плотности спектра (а) 195 кэВ, (б) 230 кэВ. Сплошная линия – спектры, измеренные магнитным спектрометром, длинный пунктир – восстановленные методом поглощающих фильтров с фитированием, короткий пунктир – без фитирования.

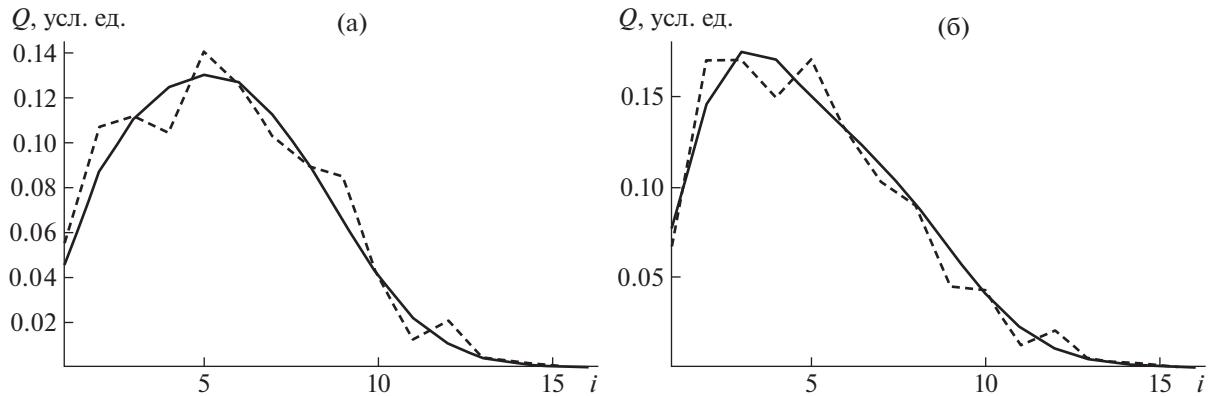
скольким из них. Поэтому решение относительно регулярно и устойчиво, что приводит к хорошему результату.

Для того чтобы обозначить границы применимости метода, рассмотрим два модельных примера. На рис. 5 сплошными линиями изображены модельные спектры: (а)  $q_1$ , (дельта-образный), (б)  $q_2$ , (не дельта-образный). В рамках используемой модели прохождения пучка через пластины, которую мы предполагаем верной, их функции поглощения равны  $Q_1 = K q_1$  и  $Q_2 = K q_2$ , которые изображены сплошными линиями на рис. 6. Далее решим уравнение  $K q = Q$  для  $Q = Q_1$ ,  $Q_2$  методом регуляризации Тихонова, так же как это было сделано в разделе 3, двумя способами: с фильтрованием и без фильтрования  $K$  и  $Q$ . Результаты обращения показаны на рис. 5 длинным и коротким пунктиром соответственно. Как видно из сравнения с оригиналами, в случае дельта-образного спектра оба способа одинаково точны, тогда как в случае не дельта-образного спектра способ без фильтрования существенно точнее.

Теперь сравним методы восстановления на предмет помехоустойчивости. Для этого добавим к модельным входным данным  $Q_1$  и  $Q_2$ , изображенным на рис. 6 сплошными линиями, случайные искажения: пунктирные линии на том же рисунке. Затем для искаженных данных так же решим обратную задачу. Результаты восстановления спектров показаны на рис. 7. Для дельта-образного спектра точность обращения с фильтрованием почти не изменилась, а без фильтрования сильно упала. Для не дельта-образного спектра в обоих методах имеет место существенное расхождение с оригиналом, тем не менее с точки зрения положе-



**Рис. 5.** Модельные спектры и результаты восстановления: (а) дельта-образная форма энергетического спектра пучка, (б) не дельта-образная форма спектра с несколькими пиками. Сплошная линия – заданные модельные спектры (слева  $q_1$ , справа  $q_2$ ), длинный пунктир – восстановленные методом поглощающих фильтров с фильтрованием, короткий пунктир – без фильтрования.  $q$  – плотность заряда относительно энергии  $\epsilon$ .



**Рис. 6.** Входные модельные данные теста с наложением искажений в методе поглощающих фильтров: (а) входные данные для дельта-образного спектра, (б) для не дельта-образного спектра. Сплошная линия – оригинальные функции поглощения  $Q$  (слева  $Q_1$ , справа  $Q_2$ ) в пластинах под номером  $i$ , пунктир – функции поглощения с искажениями.

ния главного максимума и медианы метод с фильтрованием значительно лучше.

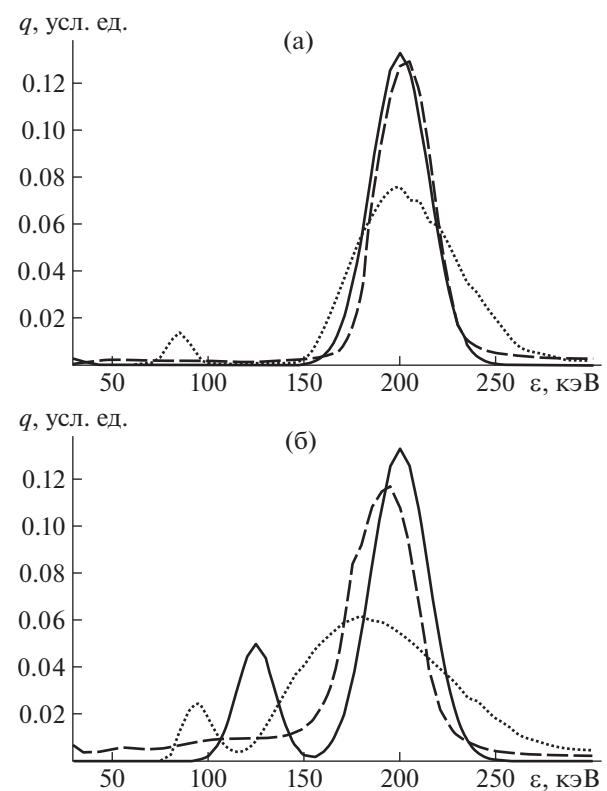
Таким образом, для дельта-образного спектра решение с использованием фильтрования существенно точнее, а для не дельта-образного спектра сравнительная точность результатов применения того или иного способа зависит от величины искажения данных. Численные эксперименты показали, что метод восстановления без фильтрования может иметь преимущества перед методом с фильтрованием при относительном среднеквадратичном отклонении входных данных от истинного значения <5%.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод поглощающих фильтров для определения спектра пучка привлекателен в первую очередь простотой конструкции измерительной аппаратуры и измерений, однако дальнейшая обработка данных и расчеты сталкиваются с существенными сложностями, в ряде случаев непреодолимыми. В частности, это связано с высокой степенью некорректности соответствующей обратной задачи, а также с отсутствием избыточности входных данных в силу разреженности и ограниченности поперечных размеров детектирующих пластин. Разработанная авторами методика позволяет отчасти решить эту проблему для дельта-образных энергетических спектров пучков заряженных частиц.

Полученный метод с фильтрованием по сравнению с обычным не модифицированным методом поглощающих фильтров имеет существенные преимущества при восстановлении дельта-образных энергетических спектров, хотя и не обеспечивает достаточную точность в случае сложных много-компонентных спектров. Тем не менее, в случае не дельта-образного распределения для сильно искаженных экспериментальных данных метод

фильтрования дает хорошее приближение к реальному спектру в смысле среднего значения и положения главного максимума.



**Рис. 7.** Модельные спектры и результаты восстановления из искаженных входных данных: (а) дельта-образный спектр, (б) не дельта-образный. Сплошная линия – исходные модельные спектры, длинный пунктир – восстановленные из искаженных данных методом с фильтрованием, короткий пунктир – методом без фильтрования.

## СПИСОК ЛИТЕРАРУРЫ/REFERENCES

1. *Москалев В.А., Сергеев Г.И., Шестаков В.Г.* Измерение параметров пучков заряженных частиц. 1980. Москва: Атомиздат.
2. *Kurapov N.N. et al.* // Proc. Int. Conf. XVIII Khari-ton's Topical Scientific Readings. RFNC VNIIEF, Sarov. 2016. Vol. 1. P. 222–228.
3. *Vogel C.R.* Computational Methods for Inverse Problems. Frontiers in Applied Mathematics. 2002.
4. *Drozdovsky A.A. et al.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2014. V. 11. P. 577–580.  
<https://doi.org/10.1134/S1547477114050124>
5. *Alekseev S.B. et al.* // Tech. Phys. 2012. V. 57. P. 1192–1198.  
<https://doi.org/10.1134/S1063784212090022>
6. GEANT4 Collab. Physics Reference Manual. Release 11.0. <https://geant4-userdoc.web.cern.ch/UsersGuides/PhysicsReferenceManual/html/index.html>. 2021.

## Method of Fitting for Determination of the Spectrum of an Electron Beam by Means of Absorption Filters

**A. A. Drozdovsky<sup>1</sup>, S. A. Drozdovsky<sup>1, \*</sup>, A. V. Kantsyrev<sup>1</sup>, A. V. Skobliakov<sup>1</sup>, and V. A. Volkov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, 123182 Russia

\*e-mail: Stanislav.Drozdovsky@itep.ru

Received July 10, 2022; revised July 30, 2022; accepted December 15, 2022

**Abstract**—In accelerator physics, the method of absorption filters is used for measurements of the energy spectrum of electrons with energy above 100 keV. In this paper, we present a modification of the method to measure delta-like spectrum of electron beams based on fitting by statistical distributions the initial experimental data and the results of simulation of the beam transmission through the filters. The method developed is much more accurate and stable than the original one and consistent with the direct measurements by a magnetic spectrometer.

**Keywords:** electron beam, energy spectrum, absorption filters, inverse problem, regularization, fitting