

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЯДЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 519.6:621.384.6

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЕ ПРИ
ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА С МУТАЦИЕЙ

© 2023 г. И. Д. Рубцова^а, Л. В. Владимирова^а*, А. Ю. Жданова^а, Н. С. Едаменко^а

^аСанкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034 Россия

*E-mail: l.vladimirova@spbu.ru

Поступила в редакцию 18.07.2022 г.

После доработки 18.07.2022 г.

Принята к публикации 25.07.2022 г.

Задача оптимизации динамики пучка в линейном ускорителе сводится к отысканию глобального минимума функционала качества в многомерном пространстве параметров. Для решения задачи применяется генетический стохастический алгоритм, основанный на моделировании многомерно-го нормального распределения с адаптацией ковариационной матрицы, при этом вычисления матрицы не требуется. Используется модификация алгоритма – мутация популяции, которая позволяет обеспечить достаточное количество проб как вблизи “наилучшей” точки, так и на отдалении от нее и избежать быстрого стягивания выборки к точке локального экстремума. Применение данного метода в задаче оптимизации динамики частиц позволило существенно улучшить характеристики пучка.

Ключевые слова: глобальный экстремум, генетический стохастический алгоритм, адаптация ковариационной матрицы, линейный ускоритель, оптимизация динамики пучка, функционал качества

DOI: 10.56304/S2079562922050402

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы оптимизации динамики пучков в ускорителях достаточно хорошо разработаны (например, [1, 2]), но задача не теряет своей актуальности. В данной работе задача оптимизации продольного движения электронов в линейном волноводном ускорителе сводится к отысканию глобального экстремума функционала качества в пространстве управляющих параметров. Поиск осуществляется в пространстве большой размерности при наличии многих локальных экстремумов. Поэтому важен выбор подходящего метода глобальной минимизации, который годился бы для решения подобных задач и при этом был прост в применении и эффективен.

Для поиска глобального экстремума функции успешно применяются стохастические методы, в частности, метод ковариационных матриц [3, 4], впервые предложенный в работе [3]. Идея метода такова: на каждой итерации рассчитываются матрица ковариаций и “наилучшая” точка, моделируется нормальное распределение с центром в этой точке; при этом большая часть выборки концентрируется в наиболее перспективной части области поиска. Однако при моделировании пробных точек в многомерном пространстве используется разложение матрицы ковариаций на треугольные, что требует значительных затрат времени; кроме

того, могут возникнуть вычислительные проблемы, если матрица ковариаций плохо обусловлена.

В работе [5] предложен метод моделирования нормального распределения без вычисления ковариационной матрицы. Положения пробных точек определяются через координаты заданных опорных точек и значения независимых стандартных нормальных случайных величин. Авторы учли эту возможность в алгоритме метода ковариационных матриц и доказали сходимость алгоритма для унимодальной функции.

В работах [6, 7] рассмотрена модификация этого метода, позволяющая избежать быстрого стягивания выборки в точку локального экстремума. Соответствующий модифицированный генетический алгоритм успешно применялся в задачах оценки параметров нелинейной регрессии и показал себя как перспективный метод решения сложных многоэкстремальных задач в пространствах большой размерности. Поэтому он был выбран для решения задачи оптимизации динамики пучка в ускорителе.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ
ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

Рассмотрим задачу поиска глобального минимума ограниченной кусочно-непрерывной скалярной функции $F(X)$

$$F(X_{\min}) = \min_{X \in D} F(X) \quad (1)$$

в ограниченной области $D \subset E^r$. Представим соответствующий алгоритм.

Нулевая итерация. При отсутствии априорной информации о функции $F(X)$ моделируются N_0 пробных точек, равномерно распределенных в области D (нулевое поколение); определяются m “лучших” точек поколения X_1, X_2, \dots, X_m и среди них “наилучшая” точка $X_{\min}^{(0)} = \arg \min_{X_1, \dots, X_{N_0}} F(X)$. При наличии информации о целевой функции точки $X_i, i = \overline{1, m}$ могут быть выбраны иначе.

k -я итерация. Осуществляется моделирование поколения пробных точек $Z_j, j = \overline{1, N_k}$, состоящего из двух групп объемом $N_k^{(1)}$ и $N_k^{(2)}$ ($N_k^{(1)} + N_k^{(2)} = N_k$), по формулам:

$$Z_j = \frac{\sigma^{(1)}(k)}{m} \sum_{i=1}^m \eta_j^{(i)} (X_i - X_{\min}^{(k-1)}) + X_{\min}^{(k-1)}, \quad j = \overline{1, N_k^{(1)}}, \quad (2)$$

$$Z_j = \frac{\sigma^{(2)}(k)}{m} \sum_{i=1}^m \eta_j^{(i)} (X_i - X_{\min}^{(k-1)}) + X_{\min}^{(k-1)}, \quad j = \overline{1, N_k^{(2)}}.$$

Здесь $\eta_j^{(i)}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, N_k}$ – независимые стандартные нормальные случайные величины; $\sigma^{(1)}(k)$ и $\sigma^{(2)}(k)$, – положительные константы, причем $\sigma^{(1)}(k) \neq \sigma^{(2)}(k)$ и хотя бы одна из них больше 1; $X_i, i = \overline{1, m}$ – “лучшие” точки предыдущего $(k-1)$ -го поколения, среди них “наилучшая” $X_{\min}^{(k-1)}$.

Затем из $N_k^{(1)}$ полученных проб выбираются m_1 “лучших” значений аргумента, из $N_k^{(2)}$ проб – m_2 “лучших” векторов, причем $m_1 + m_2 = m$. Обозначив выбранные m векторов через X_1, X_2, \dots, X_m , переходим к следующей итерации поиска.

Использование в формулах (2) различных констант $\sigma^{(1)}(k) \neq \sigma^{(2)}(k)$, хотя бы одна из которых превосходит 1, может рассматриваться как мутация в популяции пробных точек. При надлежащем выборе констант это позволяет иметь достаточное количество проб как вблизи $X_{\min}^{(k-1)}$, так и на отдалении от этой точки. Тем самым удается избежать быстрого сжатия области, содержащей большую часть пробных точек, с ростом номера итераций (что может привести к фактической остановке поиска в точке локального экстремума).

Полезным приемом является также возведение целевой функции в достаточно большую степень; это позволяет “выделить” глобальный экстремум при решении многоэкстремальных задач.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПУЧКА И ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Модель продольной динамики пучка представлена уравнениями [1]:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_s}{d\tau} = (\beta\gamma)_s / \sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2}, \\ \frac{d(\beta\gamma)_s}{d\tau} = -\alpha(\xi_s, u) \sin(\varphi_s(\xi_s, u)), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \beta\gamma / \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}, \\ \frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\alpha(\xi, u) \sin(\hat{\varphi} + \varphi_s(\xi, u)), \\ \frac{d\hat{\varphi}}{d\tau} = 2\pi(\beta\gamma\sqrt{1 + (\beta\gamma)_s^2} / ((\beta\gamma)_s\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}) - 1). \end{cases} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \xi_s(0) &= \xi_{s0}, & (\beta\gamma)_s(0) &= (\beta\gamma)_{s0}, & \xi(0) &= \xi_0, \\ (\beta\gamma)(0) &= (\beta\gamma)_0, \\ \hat{\varphi}(0) &= 2\pi\xi_0\sqrt{1 + (\beta\gamma)_{s0}^2} / (\beta\gamma)_{s0}. \end{aligned}$$

Система (3) описывает динамику синхронной частицы, система (4) – динамику частицы пучка. Здесь τ, ξ, β, γ соответственно приведенные время, продольная координата, скорость и энергия частицы. Индексом s снабжены характеристики синхронной частицы. Переменная $\hat{\varphi}$ характеризует отклонение фазы частицы от синхронной фазы φ_s . Функция $\alpha(\xi, u)$ представляет безразмерный параметр амплитуды поля ускоряющей волны; $u \in D \subset E^r$ – вектор параметров; D – ограниченная область.

Цели оптимизации динамики пучка следующие [8]: получение выходной энергии равновесной частицы в требуемом интервале; минимизация энергетической и фазовой неоднородности пучка на выходе структуры; получение коэффициента захвата частиц в режим ускорения не ниже заданного значения; выполнение требований, касающихся дефокусирующего фактора (это предпочтительно сделать на стадии оптимизации продольного движения); обеспечение монотонности группирования, то есть отрицательной скорости изменения вдоль ускорителя среднеквадратического разброса фаз частиц.

Каждой цели соответствует критерий качества, представляющий собой функционал, заданный на траекториях пучка [2, 8]. Значения критериев вычисляются на основе динамики модельных частиц;

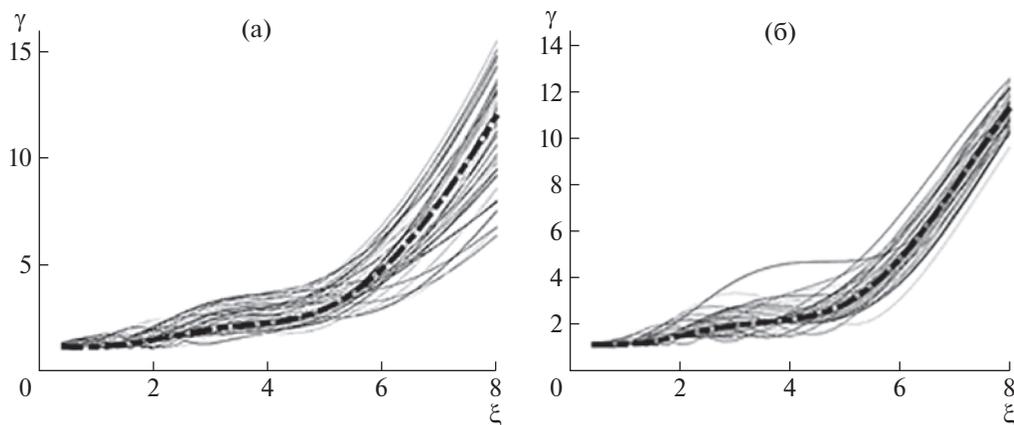


Рис. 1. Изменение приведенной энергии модельных частиц вдоль структуры до (а) и после (б) оптимизации.

каждый из них оценивает минимизируемую величину (например, разброс фаз или энергий) или меру нарушения введенного ограничения (в этом случае функционал штрафной). Качество управляемого процесса характеризуется связкой $F(u) = \sum_{l=1}^6 b_l K_l(u)$ частных критериев $K_l(u)$, $l = \overline{1,6}$; здесь b_l , $l = \overline{1,6}$ – весовые константы.

Итак, задача оптимизации динамики пучка в линейном ускорителе сводится к задаче отыскания глобального минимума функции $F(u)$ в r -мерной области D пространства параметров: $F(u_{\min}) = \min_{u \in D} F(u)$, то есть к задаче (1).

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Численное моделирование и оптимизация продольной динамики пучка выполнены для волноводного ускорителя электронов со следующими основными параметрами: энергия инжекции 80 кэВ, длина ускоряющей волны 10 см, длина структуры $L = 80$ см, радиус канала 0.04 м, средний ток пучка 0.25 А.

При расчете продольной динамики пучка использовались 50 модельных частиц.

Параметрами оптимизации являются координаты узлов неравномерной сетки на промежутке $[0, L]$ и значения производных $\alpha'(\xi)$ и $\varphi_s'(\xi)$ в этих узлах, а также значение $\alpha(0)$. Считаем, что каждая из функций $\alpha'(\xi)$ и $\varphi_s'(\xi)$ между соседними узлами меняется по линейному закону, соответственно обе функции $\alpha(\xi)$ и $\varphi_s(\xi)$ кусочно-квадратичны. Размерность вектора параметров: $r = 19$.

Использовались следующие параметры алгоритма с мутацией. Для каждого номера k поколе-

ния $N_k = 1600$, $N_k^{(1)} = 400$, $N_k^{(2)} = 1200$, $m = 210$, $m_1 = 52$, $m_2 = 158$; $\sigma^{(1)}(k) = 1$, $\sigma^{(2)}(k) = A_k k \sqrt{k}$, где

$$A_k = 0.1 / \min_{l=1,r} \sqrt{D_{k-1}^{(l)}}$$

$$D_{k-1}^{(l)} = (1/m) \sum_{i=1}^m (X_i^{(l)} - X_{\min}^{(k-1,l)})^2, \quad l = \overline{1,r}.$$

Численная минимизация выполнялась для функции $F^8(u)$ (вычислительный прием для “выделения” глобального минимума).

Оптимизация позволила существенно улучшить характеристики пучка. Так, на выходе ускорителя относительный разброс по энергиям сократился с 0.76 до 0.26, ширина фазового спектра уменьшилась с 2.33 до 1.21 радиан, приведенная энергия синхронной частицы снизилась с 12.01 до 11.29 и принадлежит требуемому интервалу (11.3; 11.7). Коэффициент захвата удовлетворяет требованиям и равен 0.92. В ходе оптимизации после 10 итераций значение критерия качества $F(u)$ снизилось с 12.988 до 1.043. Улучшение качества динамики пучка наглядно демонстрируют рисунки.

На рис. 1 можно видеть снижение энергетической неоднородности пучка после оптимизации. Жирная пунктирная линия характеризует рост энергии равновесной частицы. Рисунок 2 показывает повышение качества группировки пучка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача оптимизации динамики пучка в ускорителе, которая сведена к глобальной минимизации многоэкстремальной функции (критерия качества) в многомерном пространстве параметров. Поиск осуществлялся при использовании генетического стохастического алгоритма с мутацией. Оптимизация позволила су-

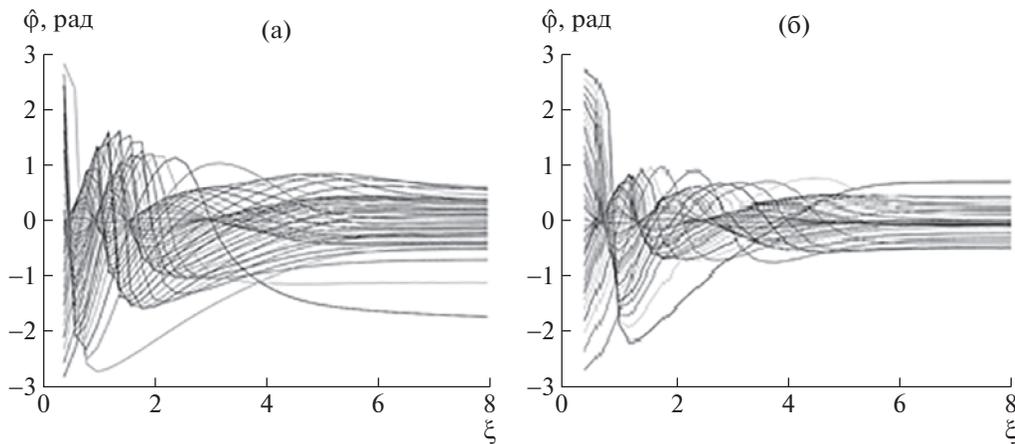


Рис. 2. Фазовые колебания частиц относительно равновесной фазы до оптимизации (а) и после оптимизации (б).

ществено повысить качество пучка, что подтверждает эффективность алгоритма для решения данного класса экстремальных задач.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность проф. С.М. Ермакову и проф. Д.А. Овсянникову за ценные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/REFERECES

1. Ovsyannikov A.D., Shirokolobov A.Y. // Proc. RuPAC'12. 2012. St. Petersburg. P. 355–357. <http://www.JACoW.org>.
2. Ovsyannikov D.A. // Proc. RuPAC'12. 2012. St. Petersburg. P. 68–72. <http://www.JACoW.org>
3. Ермаков С.М., Мутуоглова Л.В. // Автоматика и вычислительная техника. 1977. № 5. С. 38.
4. Igel C., Hansen N., Roth S. // Evol. Comput. 2007. V. 15 (1). P. 1–28.
5. Ermakov S.M., Semenchikov D.N. // Commun. Stat. B. 2022. V. 51 (4). P. 1503–1512. <https://doi.org/10.1080/03610918.2019.1672739>
6. Ermakov S.M., Vladimirova L.V., Rubtsova I.D., Rubanik A.V. // Cybern. Phys. 2022. V. 11 (1). P. 13–17. <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2022-11-1-13-17>
7. Овсянников Д.А., Владимиров Л.В., Рубцова И.Д. и др. // Изв. Иркутского гос. унив. Сер.: матем. 2022. Т. 39. С. 17–33. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.17>
8. Vladimirova L.V., Zhdanova A.Yu., Rubtsova I.D., et al. // Proc. 4th Int. Conf. Dedicated to the Memory of Prof. Vladimir Zubov. Lect. Notes Control Inform. Sci. 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87966-2_29

Beam Dynamics Optimization in the Accelerator using the Genetic Algorithm with Mutation

I. D. Rubtsova¹, L. V. Vladimirova¹, *, A. Yu. Zhdanova¹, and N. S. Edamenko¹

¹St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia

*e-mail: l.vladimirova@spbu.ru

Received July 18, 2022; revised July 18, 2022; accepted July 25, 2022

Abstract—The problem of beam dynamics optimization in linear accelerator is reduced to finding the global minimum of the quality functional in multidimensional parameter space. To solve the problem, the genetic stochastic algorithm is used, based on modeling a multivariate normal distribution with adaptation of the covariance matrix, while the calculation of the matrix is not required. The modification of the algorithm is population mutation, which allows to provide a sufficient number of samples both near the “best” point and at a distance from it and to avoid the rapid contraction of the sample to the local extremum point. The application of this method to particle dynamics optimization problem provided a significant improvement of beam characteristics.

Keywords: global extremum, genetic stochastic algorithm, covariance matrix adaptation, linear accelerator, beam dynamics optimization, quality functional